SOLVENCIA EN UN REASEGURO FINITE RISK

M. A. Pons Cardell[1] y F. J. Sarrasí Vizcarra[2]

ABSTRACT

One of the characteristics of the finite risk reinsurance is the existence of an found of experience, which is constituted by the premiums charged by the reinsurer, together with his financial incomes, and his objective is to finance the claims to be satisfied to the insurer in the specified period. The objective of this work is to design a model that allows us to determinate the reserve that the found of experience should have in every annual period in order to guarantee its dynamic solvency, taking into the experience of the claims of the reinsurer's portfolio and of each insurance company.

KEYWORDS: Reinsurance, finite risk, credibility, found of experience, solvency, risk.

RESUMEN:

Una de las características del reaseguro *finite risk* es la existencia de una cuenta de experiencia, que está formada por las primas que cobra el reasegurador, junto con su rendimiento financiero, y su finalidad es financiar los siniestros que éste ha de satisfacer a la cedente en el plazo establecido.
El objetivo de este trabajo es diseñar un modelo que permita determinar el saldo estimado o reserva que debe de tener en cada periodo anual la cuenta de experiencia para garantizar su solvencia dinámica, teniendo en cuenta la experiencia de siniestralidad de la cartera del reasegurador y de cada cedente.

PALABRAS CLAVE: Reaseguro, finite risk, credibilidad, cuenta de experiencia, solvencia, riesgo.

[1] *Profesora Titular de Universidad*. Universidad de Barcelona. Avenida. Diagonal 690, Barcelona (08034) e-mail: mapons@ub.edu
[2] *Profesor Titular de Universidad.* Universidad de Barcelona. Avenida. Diagonal 690, Barcelona (08034) e-mail: sarrasi@ub.edu

1. Introducción

El reaseguro *finite risk* está adquiriendo una importancia cada vez mayor en la política de gestión de riesgos de las compañías de seguros. Si bien tiene sus orígenes en los años 70 en Londres, no fue hasta principios de los años 80 cuando empezó a cobrar cierta importancia en Estados Unidos.

Se trata de una forma de reaseguro que se sirve de los mismos instrumentos que el reaseguro tradicional, pero presenta unos rasgos característicos:

- Los contratos son plurianuales, lo que permite constituir una relación contractual estable con la compañía de seguros a medio y largo plazo.
- Se establece un fondo, denominado cuenta de experiencia, que está constituido por las primas de reaseguro, y por su producto financiero, y de la misma son liquidados los siniestros a cargo del reasegurador.
- Para calcular la prima de reaseguro se utiliza el tipo de interés técnico fijado por el reasegurador.
- El reaseguro *finite risk* no sólo cubre de forma limitada el riesgo de suscripción, es decir, el riesgo que los siniestros reales sean mayores de lo esperado, sino que también asume otros tipos de riesgos, como el riesgo de tiempos o *timing risk* y el riesgo de interés. El *timing risk* es el riesgo derivado de que el flujo de pagos por siniestros se produzca antes de lo esperado, lo que puede suponer una desinversión prematura de las primas para poder hacer frente a esos pagos. El riesgo de interés tiene que ver con que el rendimiento financiero real obtenido en la cuenta de experiencia sea menor al tipo de interés técnico previsto inicialmente.
- El reasegurador puede pactar con la compañía de seguros, también llamada cedente, en función del riesgo asumido, la devolución total o parcial del saldo de la cuenta de experiencia al final del contrato, si éste es positivo. De la misma manera, también puede acordarse en el contrato aportaciones extraordinarias a la cuenta de experiencia por parte de la compañía de seguros en el caso de insuficiencia financiera de la misma.
- La compañía de seguros, puede contratar un reaseguro *finite risk* en cualquiera de las modalidades de reaseguro tradicionales. Nosotros estudiaremos las modalidades Cuota Parte y Exceso de Pérdida.

El objetivo de este trabajo se centra en el análisis de la solvencia dinámica de la cuenta de experiencia de cada una de las cedentes que integran la cartera del reasegurador. Determinaremos cual debe ser el saldo o reserva estimada de dicha cuenta, en cada uno de los años que dura el contrato de reaseguro, que garantice la solvencia de la operación. Si el saldo real, en un determinado año, es menor al saldo estimado de la cuenta se deberá realizar una aportación a la misma.

Plantearemos dos modelos, el modelo sin revisión y el modelo con revisión. En el primero calcularemos, en el origen de la operación, el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año y supondremos que los parámetros de las funciones de distribución, y el resto de variables del modelo, son conocidos en el origen del contrato y se mantienen constantes a lo largo del plazo. En el segundo modelo los parámetros de las funciones de distribución vamos a revisarlos anualmente, ajustándolos a la información de siniestralidad conocida de cada cedente hasta ese momento.

2. Prima de reaseguro finite risk

El hecho que el reaseguro *finite risk* tenga en cuenta no sólo el riesgo de suscripción de la cedente, sino también el riesgo de interés y el *timing risk*, supone considerar en el cálculo de la prima de reaseguro, una nueva variable que no se tenía en cuenta en el reaseguro tradicional, el tipo de interés. Esta circunstancia hace que debamos de tener en cuenta, en el cálculo de la prima de reaseguro, no sólo el coste de los siniestros y el número de ellos, sino también el momento de pago de los mismos, de manera que el proceso de riesgo viene definido por las siguientes variables aleatorias:

$$(X_1, X_2, ..., X_{N_t}, T_1, T_2, ..., T_{N_t}, N_t)$$

siendo:

- N_t: Variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $[0,t]$, con t expresado en años.
- X_i : Variable aleatoria coste del i-ésimo siniestro ocurrido en el intervalo $[0,t]$, con $i = 1,2,...,N_t$. Asumiremos que son independientes y están equidistribuidas.
- T_i : Variable aleatoria momento de pago, expresado en años, del i-ésimo siniestro, con $i = 1,2,...,N_t$.

A partir de la variable aleatoria X_i , con $i = 1,2,...,N_t$, vamos a definir, para las modalidades de reaseguro Cuota-Parte y Exceso de Pérdida, la variable aleatoria coste del siniestro i-ésimo a cargo del reasegurador, $X_{i,R}$, con $i=1,2,...,N_t$:

- En el reaseguro Cuota Parte:

$$X_{i,R} = \begin{cases} k_R \cdot X_i & k_R \cdot X_i < M_R \\ M_R & k_R \cdot X_i \geq M_R \end{cases}$$

donde k_R es el coeficiente de cesión al reasegurador, expresado en tanto por uno, y M_R es el límite del contrato de reaseguro, que proporciona la capacidad máxima por siniestro que está dispuesto a asumir el reasegurador.

- En el reaseguro Exceso de Pérdida:

$$X_{i,R} = \begin{cases} 0 & X_i < M \\ X_i - M & M \geq X_i \geq M + M_R \\ M_R & X_i \geq M + M_R \end{cases}$$

donde M es el pleno de retención de la cedente y M_R es la capacidad máxima del contrato del reasegurador, y al igual que en el caso anterior, proporciona la responsabilidad máxima del reasegurador por siniestro.

La variable aleatoria valor actual del coste total de los siniestros a cargo del reasegurador, C_R, asociado al intervalo $[0,t]$, vamos a definirla como el valor actual del coste de cada uno de los N_t siniestros a cargo del reasegurador, $X_{i,R}$, con $i=1,2,...,N_t$, que se producen en dicho intervalo:

$$C_R = \sum_{i=1}^{N_t} X_{i,R} \cdot f_R(T_i,0) \qquad \forall T_i \in [0,t]$$

siendo $f_R(T_i,0)$ el factor financiero de actualización del reasegurador, que incorpora el tipo de interés técnico utilizado en el cálculo de la prima. Asumimos que dicho tipo de interés es conocido en el origen para todo el plazo de la operación, por tanto trabajaremos con un factor financiero cierto. Vamos a expresarlo como un tanto efectivo de interés compuesto, con frecuencia de capitalización m, $I_{m,R}$, de manera que $f_R(T,T')=\left(1+I_{m,R}\right)^{m\cdot(T'-T)}$.

A partir de la variable aleatoria C_R determinaremos la prima de reaseguro, considerando como criterio de cálculo su esperanza matemática:

- Si asumimos que la periodicidad de pago de la prima es anual y que su temporalidad coincide con el plazo de la cuenta de experiencia, t años, la prima periódica, $P_{s,R}$, que cobra el reasegurador en s, con $s=0,1,...,t-1$, vendrá determinada por:

$$\sum_{s=0}^{t-1} P_{s,R}\cdot f_R(s,0)=E\left(C_R\right)$$

- Y en el caso de prima única, la prima pura Π_R, que cobra el reasegurador, se obtendrá como:

$$\Pi_R=E\left(C_R\right)$$

3. Saldo estimado de la cuenta de experiencia

En este apartado nos planteamos la obtención del saldo estimado o reserva de la cuenta de experiencia al final de cada periodo anual que garantice la solvencia dinámica de la operación. Para su obtención utilizaremos como tipo de interés de valoración el rendimiento financiero de la cuenta de experiencia. Este rendimiento dependerá de la estructura temporal de tipos de interés vigente en el mercado.

Para el cálculo del saldo estimado asumiremos las siguientes hipótesis:

- La cartera del reasegurador está formado por un conjunto de cedentes que operan en un mismo ramo.
- Conocemos las distribuciones de probabilidad del ramo objeto de estudio.
- Hay independencia entre las cedentes y dentro de cada cedente.
- La estructura temporal de tipos de interés en el plazo de la operación es conocida.

- Conocemos la historia de siniestralidad de cada cedente.

Bajo estas hipótesis se pueden plantear varios escenarios:

- El reasegurador asume todos los riesgos de la operación. En este caso le corresponde al reasegurador garantizar la solvencia de la cuenta de experiencia y las posibles aportaciones que deban realizarse en la cuenta serán a su cargo. Si al final del plazo en la cuenta de experiencia hay beneficio o pérdida lo asumirá el reasegurador. Bajo esta hipótesis, que es la que nosotros asumiremos, hay compensación de riesgos entre las cedentes que integran la cartera del reasegurador. A la hora de determinar los parámetros de las distribuciones de probabilidad de cada cedente, no sólo tendremos en cuenta las características comunes, mismo ramo y pertenencia a la misma cartera del reasegurador, sino también la historia de siniestralidad de cada una de ellas, y para ello vamos a utilizar modelos de credibilidad.

- El reasegurador no asume riesgos. Bajo esta hipótesis le corresponde a cada cedente financiar las posibles aportaciones que deban realizarse en la cuenta de experiencia, en consecuencia, el beneficio o pérdida que pueda haber en la cuenta al final del plazo lo asumirá también la cedente. A diferencia del caso anterior, no hay compensación de riesgos entre las cedentes sino que cada una de ellas financia totalmente su riesgo.

- Por último, se podría plantear una estrategia mixta en la que se compartiera con la cedente la financiación de las aportaciones a la cuenta de experiencia.

Nosotros, como ya hemos comentado, consideraremos el primer escenario, el reasegurador asume todos los riesgos de la operación. Plantearemos dos modelos, el modelo sin revisión y el modelo con revisión:

- **Modelo sin revisión**: Calcularemos, en el origen de la operación, el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año del contrato. Vamos a suponer que los parámetros de la funciones de distribución, y resto de variables del modelo, son conocidos en el origen del contrato y se mantendrán constantes a lo largo del plazo, por tanto, no se contempla la revisión de los mismos.

- **Modelo con revisión**: En este caso vamos a revisar anualmente los parámetros de las funciones de distribución, ajustándolos a la información de siniestralidad conocida de cada cedente hasta ese momento.

En ambos modelos, para poder determinar el saldo estimado de la cuenta de experiencia, estimaremos la siniestralidad futura a cargo del reasegurador por el método de simulación de Monte-Carlo.

3.1. Modelo sin revisión

El objetivo del reasegurador es garantizar que el saldo real de la cuenta de experiencia se ajuste al saldo estimado, realizando las aportaciones necesarias para cubrir esta diferencia. Calcularemos, en el origen de la operación, el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año, con los parámetros de siniestralidad conocidos en el origen. Las posibles aportaciones a realizar por el reasegurador vendrán dadas por la diferencia positiva entre el saldo estimado y el saldo real.

El factor financiero que vamos a utilizar para calcular el saldo de la cuenta de experiencia, bajo régimen financiero de interés compuesto, es:

$$f(T,T') = (1 + I_m^*(T,T'))^{m\cdot(T'-T)}$$

donde $I_m^*(T,T')$ es el tanto efectivo implícito de frecuencia m obtenido a partir de los tantos de interés al contado conocidos para los plazos $(0,T)$ y $(0,T')$.

Para el caso particular que $T = 0 \Rightarrow I_m^*\left(0,T'\right) = I_m\left(0,T'\right)$, siendo $I_m\left(0,T'\right)$ el tanto efectivo de interés al contado de frecuencia m para el plazo $(0,T')$.

En el caso que la estructura temporal de tipos de interés sea plana $I_m^*\left(T,T'\right) = I_m$, siendo I_m el rendimiento financiero de la cuenta de experiencia expresado como tanto efectivo de frecuencia m.

Vamos a simbolizar por S_j^e, con $j = 1,2,...,t$, la variable aleatoria saldo estimado de la cuenta de experiencia en j, que se puede calcular por el método retrospectivo o prospectivo:

- Método retrospectivo: El saldo estimado se obtiene, valorando en j, la diferencia entre las primas de reaseguro satisfechas y los siniestros estimados a cargo del reasegurador ocurridos hasta j, incluido.

  - En el caso de primas periódicas:

$$S_j^e = \sum_{s=0}^{j} P_{s,R} \cdot f(s,j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}} X_{i,R,[0,j]} \cdot f(T_i, j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t$$

  - y en el caso de prima única:

$$S_j^e = \Pi_R \cdot f(0,j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}} X_{i,R,[0,j]} \cdot f(T_i, j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t$$

siendo $N_{[0,j]}$ la variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $\left[0,j\right]$, con $j \le t$ y $X_{i,R,[0,j]}$ la variable aleatoria coste del siniestro i-ésimo a cargo del reasegurador, ocurrido en el intervalo $\left[0,j\right]$, con $i = 1,..., N_{[0,j]}$.

- Método prospectivo: El saldo estimado se obtiene, valorando en j, la diferencia entre los siniestros a cargo del reasegurador y las primas de reaseguro satisfechas a partir de j.

  - En el caso de primas periódicas:

$$S_j^e = \sum_{i=1}^{N_{(j,t]}} X_{i,R,(j,t]} \cdot f(T_i, j) - \sum_{s=j+1}^{t-1} P_{s,R} \cdot f(s,j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t$$

  - y en el caso de prima única:

$$S_j^e = \sum_{i=1}^{N_{(j,t]}} X_{i,R,(j,t]} \cdot f(T_i, j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t$$

siendo $N_{(j,t]}$ la variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $(j,t]$ y $X_{i,R,(j,t]}$ la variable aleatoria coste del siniestro i-ésimo a cargo del reasegurador, ocurrido en el intervalo $(j,t]$, para $i=1,...,N_{(j,t]}$.

Se verifica que $N_{[0,j]}+N_{(j,t]}=N_t$ y en el caso particular $j=t$, entonces $S_t^e=0$.

La variable aleatoria saldo estimado, S_j^e, proporciona información al reasegurador sobre el saldo que debe tener la cuenta de experiencia en cada momento j, para que quede garantizada la solvencia dinámica de la operación.

Una vez calculada la variable aleatoria saldo estimado vamos a definir la variable aleatoria aportación, A_j, con $j=1,...,t-1$, como la diferencia positiva entre el saldo estimado S_j^e y el saldo real S_j^r de la cuenta de experiencia en j. Para obtenerla, previamente hay que definir la variable saldo real en j, S_j^r.

El saldo real en j, S_j^r, vendrá dado por la diferencia entre los ingresos y los reintegros reales que haya experimentado la cuenta de experiencia hasta j, y valorados en j, sin considerar la posible aportación que el reasegurador pueda efectuar en j. Los ingresos serán las primas de reaseguro cobradas hasta j, inclusive, y las aportaciones realizadas por el reasegurador hasta $j-1$, mientras que los reintegros vendrán dados por los siniestros reales ocurridos hasta j a cargo del reasegurador:

- En el caso de primas periódicas:

$$S_j^r=\sum_{s=0}^{j}P_{s,R}\cdot f(s,j)+\sum_{s=1}^{j-1}A_s^*\cdot f(s,j)-\sum_{i=1}^{N_{[0,j]}^r}X_{i,R,[0,j]}^r\cdot f(T_i^r,j) \quad \text{con} \quad j=1,...,t$$

  y para $j=1$:

$$S_1^r=\sum_{s=0}^{1}P_{s,R}\cdot f(s,1)-\sum_{i=1}^{N_{[0,1]}^r}X_{i,R,[0,1]}^r\cdot f(T_i^r,1)$$

- Si la prima es única:

$$S_j^r = \Pi_R \cdot f(0,j) + \sum_{s=1}^{j-1} A_s^* \cdot f(s,j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}^r} X_{i,R,[0,j]}^r \cdot f(T_i^r, j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t$$

y para $j = 1$:

$$S_1^r = \Pi_R \cdot f(0,1) - \sum_{i=1}^{N_{[0,1]}^r} X_{i,R,[0,1]}^r \cdot f(T_i^r, 1)$$

siendo $N_{[0,j]}^r$ el número de siniestros reales ocurridos en el intervalo $\left[0,j\right]$, con $j \le t$, $X_{i,R,[0,j]}^r$ el coste real del siniestro i-ésimo a cargo el reasegurador ocurrido en el intervalo $\left[0,j\right]$, con $i = 1,...,N_{[0,j]}^r$, A_s^* la aportación que ha efectuado el reasegurador en la cuenta de experiencia en s , con $s = 1,..., j-1$ y T_i^r el momento real de pago, en años, del siniestro i-ésimo.

La variable aleatoria aportación vendrá dada por:

$$A_j = \begin{cases} 0 & S_j^e \le S_j^r \\ S_j^e - S_j^r & S_j^e > S_j^r \end{cases} \quad \text{con} \quad j = 1,...,t-1$$

Una vez conocida la distribución de probabilidad de la variable aleatoria A_j determinaremos la aportación, A_j^*, que debe efectuar el reasegurador en j. Si consideramos como criterio de cálculo su esperanza matemática, entonces:

$$A_j^* = E(A_j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t-1$$

3.2. Modelo con revisión

En el modelo con revisión, el saldo estimado no se calcula en el origen de la operación sino al final de cada año del contrato, ya que en este caso los parámetros de las funciones de distribución se van a revisar anualmente, ajustándolos a la información de siniestralidad de cada cedente conocida hasta ese momento. El objetivo de este modelo sigue siendo calcular el saldo estimado de la cuenta de experiencia así como las posibles aportaciones A_j^*, con $j = 1,...,t-1$, que debe realizar el reasegurador, para garantizar dicho saldo.

Calcularemos, al final del año j, con $j = 1,...,t-1$, el saldo estimado de la cuenta de experiencia en j, con los parámetros de siniestralidad establecidos en j; por tanto las variables aleatorias, coste y número de siniestros, harán referencia a los siniestros ocurridos a partir de j, es decir, en el intervalo $(j,t]$, pero obtenidas con los parámetros de siniestralidad establecidos en j, a partir de la información pasada disponible hasta j. Las variables aleatorias coste y número de siniestros los simbolizaremos:

- $N^{j}_{(j,t]}$: Variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $(j,t]$, con los parámetros de siniestralidad establecidos en j.
- $X^{j}_{i,(j,t]}$: Variable aleatoria coste del siniestro i-ésimo, con $i = 1,..., N^{j}_{(j,t]}$, ocurrido en el intervalo $(j,t]$, con los parámetros de siniestralidad establecidos en j.

La variable aleatoria coste a cargo del reasegurador, $X^{j}_{i,R,(j,t]}$, con $i = 1,..., N^{j}_{(j,t]}$, del siniestro i-ésimo ocurrido en el intervalo $(j,t]$, dependerá también de la modalidad de reaseguro que consideremos:

- En el reaseguro Cuota Parte:

$$X^{j}_{i,R,(j,t]} = \begin{cases} k_R \cdot X^{j}_{i,(j,t]} & k_R \cdot X^{j}_{i,(j,t]} < M_R \\ M_R & k_R \cdot X^{j}_{i,(j,t]} \geq M_R \end{cases}$$

- En el reaseguro Exceso de Pérdida:

$$X^{j}_{i,R,(j,t]} = \begin{cases} 0 & X^{j}_{i,(j,t]} < M \\ X^{j}_{i,(j,t]} - M & M \geq X^{j}_{i,(j,t]} \geq M + M_R \\ M_R & X^{j}_{i,(j,t]} \geq M + M_R \end{cases}$$

La variable aleatoria aportación, A_j, con $j = 1,...,t-1$, que deberá de realizar el reasegurador en j para mantener la solvencia de la cuenta de experiencia, vendrá dada por la diferencia positiva en j de la variable aleatoria saldo estimado de la cuenta de experiencia, $S^{e,j}_{j,(j,t]}$ y el saldo real de la cuenta de experiencia, S^{r}_{j}.

El factor financiero que utilizaremos en j para calcular el saldo de la cuenta de experiencia en j bajo régimen financiero de interés compuesto es:

$$f^{j}(T,j) = (1+I_m(j,T))^{m\cdot(j-T)} \quad T > j \quad \text{con} \quad j = 1,...,t-1$$

donde $I_m(j,T)$ es el tanto efectivo de interés al contado, de frecuencia m, vigente en j para el plazo (j,T).

Al igual que en el modelo sin revisión, si la estructura temporal de tipos de interés es plana $I_m(j,T) = I_m$.

La variable aleatoria saldo estimado en j, $S^{e,j}_{j,(j,t]}$, la definimos como el valor en j de la diferencia entre los siniestros a cargo del reasegurador y primas de reaseguro pendientes de pago a partir de j, con los parámetros de siniestralidad establecidos en j:

- En el caso de primas periódicas:

$$S^{e,j}_{j,(j,t]} = \sum_{i=1}^{N^{j}_{(j,t]}} X^{j}_{i,R,(j,t]} \cdot f^{j}(T_{i,(j,t]}, j) - \sum_{i=j+1}^{t-1} P_{i,R} \cdot f^{j}(i,j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t$$

  siendo $T_{i,(j,t]}$, con $i = 1,...,N^{j}_{(j,t]}$, la variable aleatoria momento de pago en años, del siniestro i-ésimo ocurrido en el intervalo $(j,t]$.

- En el caso de prima única:

$$S^{e,j}_{j,(j,t]} = \sum_{i=1}^{N^{j}_{(j,t]}} X^{j}_{i,R,(j,t]} \cdot f^{j}(T_{i,(j,t]}, j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t$$

La variable aleatoria aportación, A_j, será:

$$A_j = \begin{cases} 0 & S^{e,j}_{j,(j,t]} \le S^r_j \\ S^{e,j}_{j,(j,t]} - S^r_j & S^{e,j}_{j,(j,t]} > S^r_j \end{cases} \quad \text{con} \quad j = 1,...,t-1$$

Una vez conocida la distribución de probabilidad de la variable aleatoria A_j, al igual que en el modelo anterior, determinaremos la aportación, A^*_j, que debe efectuar el reasegurador en j. Si consideramos como criterio de cálculo su esperanza matemática, entonces:

$$A^*_j = E(A_j) \quad \text{con} \quad j = 1,...,t-1$$

4. Distribuciones de probabilidad

Para poder determinar la variable aleatoria saldo estimado, deberemos asumir hipótesis respecto a las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias que intervienen en el proceso de riesgo:

$$(X_1, X_2,..., X_{N_t}, T_1, T_2,..., T_{N_t}, N_t)$$

La variable aleatoria X_i, coste del i-ésimo siniestro ocurrido en el intervalo $[0,t]$, con $i = 1,2,..., N_t$, asumiremos que se distribuye según una función de distribución exponencial de parámetro μ_0, $X_i \sim Exp(\mu_0)$, siendo $1/\mu_0$ el coste medio de los siniestros en el intervalo $[0,t]$.

Del mismo modo, vamos a asumir que la variable aleatoria $X^j_{i,(j,t]}$, coste del siniestro i-ésimo, con $i = 1,..., N^j_{(j,t]}$, ocurrido en el intervalo $(j,t]$, con los parámetros de siniestralidad establecidos en j, se distribuye según una función de distribución exponencial de parámetro μ_j, $X^j_{i,(j,t]} \sim Exp(\mu_j)$, siendo $1/\mu_j$ el coste medio de los siniestros en el intervalo $(j,t]$.

También asumiremos que la variable aleatoria tiempo de interocurrencia, en años, entre dos siniestros en el intervalo $[0,t]$, $T_s - T_{s-1}$, sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_0 > 0$, para $s = 1,2,..., N_t$. Este parámetro queda determinado en el origen de la operación. Bajo esta hipótesis queda definida la distribución de probabilidad del número de siniestros N_t, ya que si $T_s - T_{s-1} \sim Exp(\lambda_0)$ para $s = 1,2,...,N_t$ y $\lambda_0 > 0$ entonces $N_t \sim P(\lambda_0 \cdot t)$.

A partir de $T_s - T_{s-1}$ podemos determinar la variable aleatoria T_i con $i = 1,2,...,N_t$ por suma:

$$T_i = \sum_{s=1}^{i} T_s - T_{s-1} \quad \text{con} \quad T_0 = 0$$

Como la variable aleatoria número de siniestros, N_t, sigue una distribución de Poisson, su esperanza coincide con el valor del parámetro de la distribución, esto es, $E(N_t) = \lambda_0 \cdot t$, pudiéndose interpretar λ_0 como el número medio anual de siniestros. El parámetro λ_0 también nos servirá para calcular el tiempo medio entre dos siniestros, dado que $E(T_s - T_{s-1}) = \dfrac{1}{\lambda_0}$.

Del mismo modo, si el tiempo de interocurrencia, en años, entre dos siniestros en el intervalo $(j,t]$, $T_s - T_{s-1}$, con $s = 1,...,N^j_{(j,t]}$, sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_j > 0$, entonces queda definida la distribución de probabilidad del número de siniestros $N^j_{(j,t]}$, ya que si $T_s - T_{s-1} \sim Exp(\lambda_j)$ para $s = 1,...,N^j_{(j,t]}$ y $\lambda_j > 0$ entonces $N^j_{(j,t]} \sim P(\lambda_j \cdot (t - j))$.

A partir de $T_s - T_{s-1}$ podemos determinar la variable aleatoria $T_{i,(j,t]}$, con $i = 1,...,N^j_{(j,t]}$ como:

$$T_{i,(j,t]} = j + \sum_{s=1}^{i} T_s - T_{s-1} \quad \text{con} \quad T_0 = j$$

En este caso el parámetro λ_j queda determinado en el momento j y para todo el intervalo $(j,t]$.

Como la variable aleatoria número de siniestros, $N^j_{(j,t]}$, sigue una distribución de Poisson su esperanza coincide con el valor del parámetro de la distribución, esto es, $E(N^j_{(j,t]}) = \lambda_j \cdot (t - j)$, pudiéndose interpretar λ_j, al igual que en el caso anterior, como el número medio anual de siniestros, pero en este caso asociado al intervalo $(j,t]$. El parámetro λ_j también nos servirá para calcular el tiempo medio entre dos siniestros, dado que $E(T_s - T_{s-1}) = \dfrac{1}{\lambda_j}$.

5. Coste medio y número medio de siniestros obtenidos con modelos de credibilidad

El coste medio o esperanza matemática de la variable aleatoria $X^j_{i,(j,t]}$, con $i = 1,...,N^j_{(j,t]}$, vamos a definirla como $E\left(X^j_{i,(j,t]}\right) = 1/\mu_j = \alpha_j \cdot \left(1+\sigma_j\right)$, siendo α_j la componente histórica calculada en el momento j y σ_j la componente subjetiva introducida por el reasegurador en el momento j, expresada como recargo en tanto por uno. La componente histórica, α_j, vendrá determinada por la experiencia de siniestralidad de la cedente y/o de la cartera, y la componente subjetiva dependerá de las expectativas futuras que tenga el reasegurador respecto a la posible evolución del coste medio de los siniestros en el intervalo considerado.

En el caso particular que $j = 0$, $X^0_{i,(0,t]} = X_i$ y $N^0_{(0,t]} = N_t$, y en este caso $E\left(X_i\right) = 1/\mu_0 = \alpha_0 \cdot \left(1+\sigma_0\right)$, siendo α_0 la componente histórica y σ_0 la componente subjetiva introducida por el reasegurador en el momento 0.

Como ya hemos dicho, la variable aleatoria número de siniestros, $N^j_{(j,t]}$, sigue una distribución de Poisson y su esperanza es $E(N^j_{(j,t]}) = \lambda_j \cdot (t-j)$, donde λ_j se interpreta como el número medio anual de siniestros en el intervalo $(j,t]$, parámetro que deberemos estimar. En el caso particular que $j = 0$, $N^0_{(0,t]} = N_t$ y $E(N_t) = \lambda_0 \cdot t$, siendo λ_0 el parámetro a estimar en este caso.

Para estimar la componente histórica del coste medio, α_j, y el número medio anual de siniestros de cada cedente, λ_j, nos podemos encontrar frente a dos posibles escenarios:

- No disponemos de experiencia de siniestralidad pasada de la cedente. En este caso, el coste medio y el número medio de siniestros para esta cedente vendrán dados por el coste y número medio del ramo.
- Disponemos de experiencia de siniestralidad pasada de la cedente. En este otro caso aplicaremos la Teoría de la Credibilidad para discriminar el coste medio y el número medio de siniestros de cada cedente, en función de su propia historia de siniestralidad, pero teniendo en cuenta también la experiencia de siniestralidad de la cartera.

5.1. Estimador del parámetro coste medio de los siniestros

Para determinar estimador de la componente histórica del coste medio, o de la esperanza matemática de las variables aleatorias X_i o $X^j_{i,(j,t]}$, α_j, con $j = 0,1,...,t-1$, vamos a asumir la existencia de independencia entre las cedentes, así como que los parámetros de riesgo, que describen las características de riesgo de cada cedente, están idénticamente distribuidos.

Dicho estimador lo obtendremos aplicando el modelo de credibilidad de Bühlmann-Straub, ya que suponemos que el reasegurador dispone de información respecto al coste medio de los siniestros ocurridos desde hace H años, a contar desde j , y del número de siniestros ocurridos cada año, para cada una de las cedentes.

Las variables más relevantes que intervienen en la obtención del estimador de credibilidad son:

- θ_k : Parámetro de riesgo. Es una variable aleatoria desconocida, que describe las características de riesgo de cada cedente, con $k = 1,2,...,K$, siendo K el número de cedentes.
- X_{kh} : Variable aleatoria observable que nos indica el coste medio anual por siniestro, con $k = 1,2,...,K$ y $h = 1,2,...,H$, siendo H el número de años observados para cada cedente.
- w_{kh} : Pesos o ponderaciones naturales, que son números positivos conocidos, con $k = 1,2,...,K$ y $h = 1,2,...,H$, y los interpretaremos como el número de siniestros ocurridos cada año para cada cedente.

En el Modelo de Bühlmann-Straub se asume independencia entre y dentro de las cedentes, así como que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, $E\left(X_{kh}/\theta_k\right)=\alpha_j\left(\theta_k\right)$, y la varianza depende del periodo considerado, a través de los pesos o ponderaciones naturales.

$\alpha_j\left(\theta_k\right)$ es la cuantía esperada del coste medio de los siniestros para cada cedente $k=1,2,...,K$, y su estimador ajustado de credibilidad lineal según el Modelo de Bühlmann-Straub viene dado por:

$$\hat{\alpha}_j\left(\theta_k\right)=\left(1-Z_k\right)\cdot m+Z_k\cdot X_{kw}$$

donde:

- $X_{kw}=\sum_{h=1}^{H}\frac{w_{kh}\cdot X_{kh}}{w_{k\bullet}}$ con $w_{k\bullet}=\sum_{h=1}^{H}w_{kh}$. Es el estimador individual del coste medio y no es más que la media aritmética ponderada de la experiencia de siniestralidad de cada cedente.
- $m=E\left(\alpha_j\left(\theta_k\right)\right)$. Es la media poblacional, esto es, el estimador colectivo del coste medio. Es el coste medio esperado de los siniestros para el conjunto de la cartera, que a su vez no es más que el valor esperado de todas las primas de riesgo individuales.
- Z_k con $k=1,2,...,K$. Es el factor de credibilidad, con $0\leq Z_k\leq 1$. Cada cedente tiene su propio factor de credibilidad y viene definido por:

$$Z_k=\frac{a\cdot w_{k\bullet}}{\sigma^{*2}+a\cdot w_{k\bullet}}$$

- $\sigma^{*2}=E\left(\sigma^2\left(\theta_k\right)\right)$. Es el valor esperado de la dispersión total de los datos del coste medio de los siniestros en el tiempo, de toda nuestra cartera.
- $a=Var\left(\alpha_j\left(\theta_k\right)\right)$. Mide la dispersión existente entre las primas de riesgo individuales. Es un indicador de la heterogeneidad de la cartera.

En la fórmula del estimador de credibilidad aparecen tres parámetros estructurales m, a y σ^{*2} que deben ser previamente estimados para poder aplicar dicha fórmula.

Estimador de la media poblacional: $m = E\left(\alpha_j\left(\theta_k\right)\right)$

El estimador de la media poblacional más utilizado, que vamos a simbolizarlo por X_{zw}, es el propuesto por Dubey, A. y Gisler, A. (1981), ya que se trata de un estimador insesgado y de varianza mínima:

$$X_{zw} = \sum_{k=1}^{K} \frac{Z_k}{Z_\bullet} \cdot X_{kw} \quad \text{con} \quad Z_\bullet = \sum_{k=1}^{K} Z_k$$

Este estimador en realidad es un pseudo-estimador ya que a través del factor de credibilidad Z_k depende de los parámetros estructurales a y σ^{*2}. En la práctica ambos parámetros son reemplazados por sus correspondientes estimadores.

Estimador del parámetro $\sigma^{*2} = E\left(\sigma^2\left(\theta_k\right)\right)$

El estimador más adecuado, en la mayoría de los casos, para el parámetro σ^{*2} es el que propuesto por Bühlmann, H. y Straub, E. (1970), que vamos a simbolizarlo por $\hat{\sigma}^{*2}$ y no es más que el valor medio de las K varianzas individuales empíricas:

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{H-1} \cdot \sum_{h=1}^{H} w_{kh} \cdot \left(X_{kh} - X_{kw}\right)^2$$

siendo $X_{kw} = \sum_{h=1}^{H} \frac{w_{kh} \cdot X_{kh}}{w_{k\bullet}}$ y $w_{k\bullet} = \sum_{h=1}^{H} w_{kh}$.

Estimador del parámetro $a = Var\left(\alpha\left(\theta_k\right)\right)$

El estimador que vamos a utilizar es el propuesto también por Bühlmann, H. y Straub, E. (1970), y vamos a simbolizarlo por $\hat{a}$ y se define como:

$$\hat{a} = \frac{1}{c} \cdot \left[\sum_{k=1}^{K} \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \cdot \left(X_{kw} - X_{ww}\right)^2 - \left(K-1\right) \cdot \frac{\hat{\sigma}^{*2}}{w_{\bullet\bullet}} \right]$$

donde

$$w_{k\bullet} = \sum_{h=1}^{H} w_{kh} \quad \text{y} \quad w_{\bullet\bullet} = \sum_{k=1}^{K} w_{k\bullet}$$

$$X_{kw} = \sum_{h=1}^{H} \frac{w_{kh} \cdot X_{kh}}{w_{k\bullet}} \qquad \text{y} \qquad X_{ww} = \sum_{k=1}^{K} \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \cdot X_{kw}$$

$$c = \sum_{k=1}^{K} \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \cdot \left[1 - \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \right]$$

Es posible que $\hat{a} < 0$, en este caso se utiliza como estimador $\hat{a} = 0$.

En el caso particular que $\hat{a} = 0 \Rightarrow Z_k = 0 \Rightarrow \hat{\alpha}_j\left(\theta_k\right) = m$. En este caso, Dubey, A. y Gisler, A. (1981) proponen como estimador de la media poblacional, X_{ww}, que viene definido:

$$X_{ww} = \sum_{k=1}^{K} \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \cdot X_{kw}$$

con $w_{k\bullet} = \sum_{h=1}^{H} w_{kh}$ y $w_{\bullet\bullet} = \sum_{k=1}^{K} w_{k\bullet}$

5.2. Número medio de siniestros

Para estimar el parámetro número medio de siniestros, λ_j, con $j = 0,1,...,t-1$, vamos a asumir, al igual que en el caso anterior, la existencia de independencia entre las cedentes, así como que los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos.

El estimador de dicho parámetro vamos a obtenerlo, en este caso, aplicando el Modelo de credibilidad de Bühlmann, ya que suponemos que el reasegurador dispone únicamente de información respecto al número de siniestros ocurridos desde hace H años, a contar desde j , para cada una de las cedentes.

Las variables más relevantes que intervienen en la obtención del estimador de credibilidad según el Modelo de Bühlmann son:

- θ_k : Parámetro de riesgo. Es una variable aleatoria desconocida, que describe las características de riesgo de cada cedente, con $k=1,2,...,K$ siendo K el número de cedentes.
- N_{kh}: Variable aleatoria observable que nos indica el número de siniestros, con $k=1,2,...,K$ y $h=1,2,...,H$, siendo H el número de años observados para cada cedente.

En el Modelo de Bühlmann se asume independencia entre y dentro de las cedentes, así como que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo, $E\left(N_{kh}/\theta_k\right)=\lambda_j\left(\theta_k\right)$, y la varianza no depende del periodo considerado.

$\lambda_j\left(\theta_k\right)$ es el número medio de siniestros esperados cada cedente con $k=1,2,...,K$ y su estimador ajustado de credibilidad lineal viene dado por:

$$\hat{\lambda}_j\left(\theta_k\right)=\left(1-Z\right)\cdot m+Z\cdot N_{k\bullet}$$

donde:

- $N_{k\bullet}=\sum_{h=1}^{H}\frac{N_{kh}}{H}$. Es estimador individual del número medio de siniestros y no es más que la media aritmética de los siniestros ocurridos a cada cedente.
- $m=E\left(\lambda_j\left(\theta_k\right)\right)$. Es la media poblacional, el estimador colectivo del número medio de siniestros, esto es, el número medio esperado de siniestros para el conjunto de la cartera, que a su vez no es más que el valor esperado de todas las primas de riesgo individuales.
- Z es el factor de credibilidad, con $0\le Z\le 1$, siendo único para la cartera y viene definido por:

$$Z=\frac{a\cdot H}{\sigma^{*2}+a\cdot H}$$

- $\sigma^{*2}=E\left(\sigma^2\left(\theta_k\right)\right)$. Es el valor esperado de la dispersión total del número de siniestros de nuestra cartera en el tiempo.
- $a=Var\left(\lambda_j\left(\theta_k\right)\right)$. Es un indicador de la heterogeneidad de la cartera, medida a través del número medio de siniestros individuales esperados.

Al igual que en el Modelo de Bühlmann-Straub, en la fórmula de credibilidad aparecen tres parámetros estructurales m, a y σ^{*2} que deben ser previamente estimados. Para estimarlos vamos a utilizar los estimadores propuestos por Norberg, R. (1979).

Estimador de la media poblacional: $m = E\left(\lambda\left(\theta_k\right)\right)$

El estimador de la media poblacional, $N_{\bullet\bullet}$, es el valor medio observado:

$$N_{\bullet\bullet} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} N_{k\bullet} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{H} \cdot \sum_{h=1}^{H} N_{hk}$$

Estimador del parámetro $\sigma^{*2} = E\left(\sigma^2\left(\theta_k\right)\right)$

Un estimador adecuado, que vamos a simbolizar por $\hat{\sigma}^{*2}$, es el valor medio de las K varianzas individuales empíricas:

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{H-1} \cdot \sum_{h=1}^{H} \left(N_{kh} - N_{k\bullet}\right)^2$$

Estimador del parámetro $a = Var\left(\lambda\left(\theta_k\right)\right)$

El estimador que vamos a utilizar para estimar el parámetro a, y que vamos a simbolizar por $\hat{a}$, se define como:

$$\hat{a} = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^{K} \left(N_{k\bullet} - N_{\bullet\bullet}\right)^2 - \frac{\hat{\sigma}^{*2}}{H}$$

Es posible que $\hat{a} < 0$, en este caso utilizaremos como estimador:

$$\hat{a} = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^{K} \left(N_{k\bullet} - N_{\bullet\bullet}\right)^2$$

6. Aplicación numérica

Vamos a considerar una compañía de reaseguros que contrata un reaseguro *finite risk* a 5 años para un determinado ramo con tres compañías de seguros (cedentes). La compañía de reaseguros dispone hoy, $j = 0$, de información respecto al coste de los siniestros, expresados en miles de euros, y al momento de ocurrencia de cada siniestro, expresado en años, acaecidos en los últimos cinco años, $H = 5$, para cada una de las tres cedentes, $K = 3$.

Los datos de la siniestralidad histórica para cada una de las tres cedentes para los últimos 5 años son los siguientes:

Cedente 1 (k = 1)		**Cedente 2 (k = 2)**		**Cedente 3 (k = 3)**	
Diferimiento	**Coste**	**Diferimiento**	**Coste**	**Diferimiento**	**Coste**
0,3361	5,5000	0,3076	4,0823	0,0254	4,1065
0,5219	4,2500	0,3249	7,0642	0,4648	4,9236
0,5994	1,0000	0,3372	1,0327	0,5016	2,4565
0,9356	3,2500	0,4894	0,2486	0,6278	0,2316
0,9998	1,0000	0,5038	5,0599	1,6176	9,7855
1,1083	2,0000	0,6500	9,6727	1,7908	1,4671
1,2508	3,5000	0,6916	2,4659	1,8032	5,7930
1,2589	2,5000	0,9519	1,7657	1,8144	2,7915
1,6180	2,5000	1,0762	10,2710	2,1123	4,1836
1,7014	1,0000	1,6280	12,9910	2,2418	2,6089
1,8885	6,5000	1,8103	3,4260	2,3149	2,9194
2,1532	0,5000	1,8244	17,9068	2,5616	13,0480
2,4576	2,0000	1,8707	5,1849	2,7478	0,0927
2,5165	2,0000	1,9006	4,7011	2,9789	10,3902
3,7405	0,5000	1,9045	6,0894	3,1169	1,1304
3,8529	0,5000	2,0356	0,2645	3,3640	22,5375
3,9986	2,6000	2,4530	1,0989	3,6507	0,5052
4,0255	5,0000	2,4653	1,8359	3,7459	7,6579
4,0271	6,2500	2,5431	0,6137	3,8180	8,2535
4,6397	7,2500	3,0590	0,6556	3,9022	5,2094
4,8345	2,7500	3,5735	3,0009	3,9874	9,2917
4,9321	3,7500	3,5954	0,6499	4,0338	1,1087
		3,9506	5,4664	4,3714	3,9622
		4,0611	9,8734	4,5310	12,2829
		4,1543	12,2953	4,6852	0,2307
		4,2638	0,8074	4,6959	2,3442
		4,4236	0,5569	4,8734	10,3656
		4,4325	26,5370	4,8843	17,9788
		4,6998	3,1321		
		4,9675	0,8519		

De la anterior información podemos obtener el número de siniestros ocurridos cada año, así como el coste medio de los mismos, para cada una de las tres cedentes que integran la cartera.

Número de siniestros			
h	**k = 1**	**k = 2**	**k = 3**
1	5	8	4
2	6	7	4
3	3	4	6
4	3	4	7
5	5	7	7

Coste medio de los siniestros			
h	**k = 1**	**k = 2**	**k = 3**
1	3,0000	3,9240	2,9295
2	3,0000	8,6529	4,9593
3	1,5000	0,9533	5,5405
4	1,2000	2,4432	7,7979
5	5,0000	7,2220	6,8962

Modelo sin revisión

Para calcular el estimador de la componente histórica del coste medio hoy, en el origen de la operación, α_0, hemos aplicado el modelo de credibilidad de Bühlmann-Straub, ya que no sólo disponemos de información, para cada cedente, respecto al coste medio de los siniestros ocurridos en los 5 últimos años, sino también del número de siniestros ocurridos cada año, información esta última que vamos a asignarle el significado de ponderación o pesos naturales conocidos. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

k	$\hat{\alpha}_0(\theta_k)$	X_{kw}	Z_k
1	4,8876	3,0045	0,0142
2	4,9226	5,3201	0,0193
3	4,9341	5,9877	0,0180

Parámetros estructurales:

$X_{zw} = 4{,}9150$

$\hat{\sigma}^{*2} = 29{,}2610$

$\hat{a} = 0{,}5610$

Para estimar el parámetro número medio de siniestros hoy, en el origen de la operación, λ_0, hemos aplicado el modelo de Bühlmann ya que sólo disponemos de información, para cada cedente, respecto al número de siniestros ocurridos cada año. Los resultados obtenidos en este caso son:

k	$\hat{\lambda}_0(\theta_k)$	$N_{k\bullet}$	Z
1	5,0821	4,4000	0,269
2	5,5128	6,0000	0,269
3	5,4051	5,6000	0,269

Parámetros estructurales:

$N_{\bullet\bullet} = 5{,}3330$

$\hat{\sigma}^{*2} = 9{,}2000$

$\hat{a} = 0{,}1870$

A continuación obtendremos para un reaseguro *finite risk* Cuota Parte y Exceso de Pérdida el saldo estimado por el método de simulación de Monte Carlo. Los datos los hemos obtenido simulando 50.000 trayectorias de evolución de la siniestralidad del reasegurador para cada una de las tres cedentes y hemos supuesto que el tanto efectivo anual de valoración, que proporciona la cuenta de experiencia, es constante para todo el plazo de la operación y coincide con el tipo de interés técnico del reasegurador $I_{1,R} = I_1 = 0,03$.

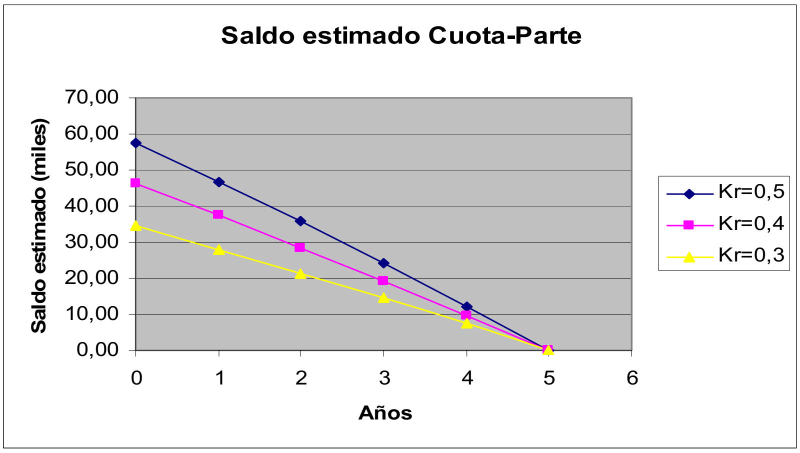
Para el caso de un reaseguro *finite risk* Cuota Parte a prima única, con una cuota de cesión al reasegurador del 50%, $k_R = 0,5$, el saldo estimado, S_j^e, calculado al final de cada uno de los 5 años de vigencia del contrato de reaseguro para cada una de las tres cedentes, expresado en miles de euros, es:

Saldo estimado en el origen de la operación Reaseguro cuota parte			
j	**Cedente 1**	**Cedente 2**	**Cedente 3**
1	46,805260	51,164997	50,215015
2	35,629105	38,923470	38,243820
3	24,113569	26,310287	25,888378
4	12,235229	13,387703	13,148104
5	0,00000	0,00000	0,00000

y para el caso del reaseguro Exceso de Pérdida a prima única, con un pleno de retención de la cedente $M = 5$ y con una capacidad del reasegurador por siniestro $M_R = 6$ (expresado los plenos en miles de euros):

Saldo estimado en el origen de la operación Reaseguro Exceso de Pérdida			
j	**Cedente 1**	**Cedente 2**	**Cedente 3**
1	23,794001	26,089884	25,617228
2	18,107178	19,834793	19,521482
3	12,255095	13,424452	13,203841
4	6,218809	6,829707	6,709347
5	0,00000	0,00000	0,00000

En la siguiente gráfica mostramos la evolución del saldo estimado para la cedente 1 y para el caso Cuota Parte, si la cuota de cesión al reaseguro k_R toma los siguientes valores: k_R=0,5 , k_R= 0,4 y k_R=0,3.



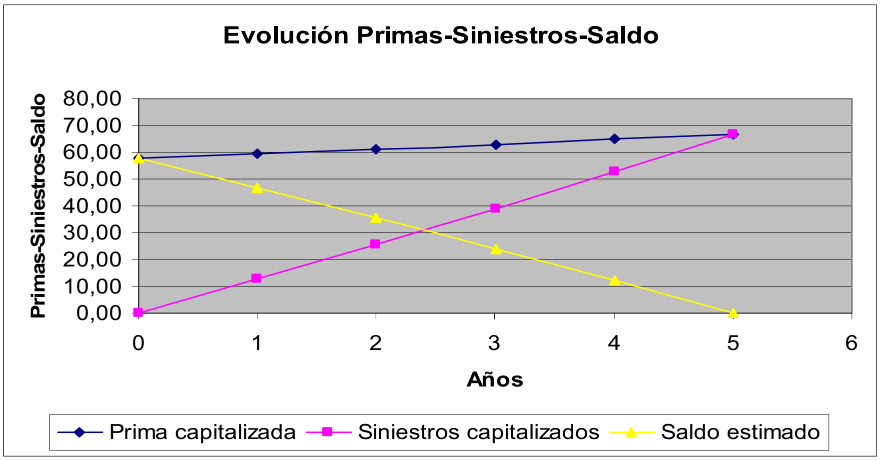
Podemos observar como el reasegurador tendrá que dotar menos saldo conforme más pequeña sea su cuota de retención k_R.

En la siguiente tabla mostramos la evolución de la prima única capitalizada, de los siniestros acumulados capitalizados y del saldo estimado, para la cedente 1, en el caso del reaseguro Cuota Parte:

j	**Prima única capitalizada**	**Siniestros acumulados capitalizados**	**Saldo estimado**
0	57,695833	0	57,695833
1	59,426708	12,621449	46,805260
2	61,209509	25,580404	35,629105
3	63,045794	38,932224	24,113569
4	64,937168	52,701939	12,235229
5	66,885283	66,885283	0,00000

donde la esperanza matemática de la prima única de reaseguro es de 57,695833 miles de euros.

Gráficamente tenemos:



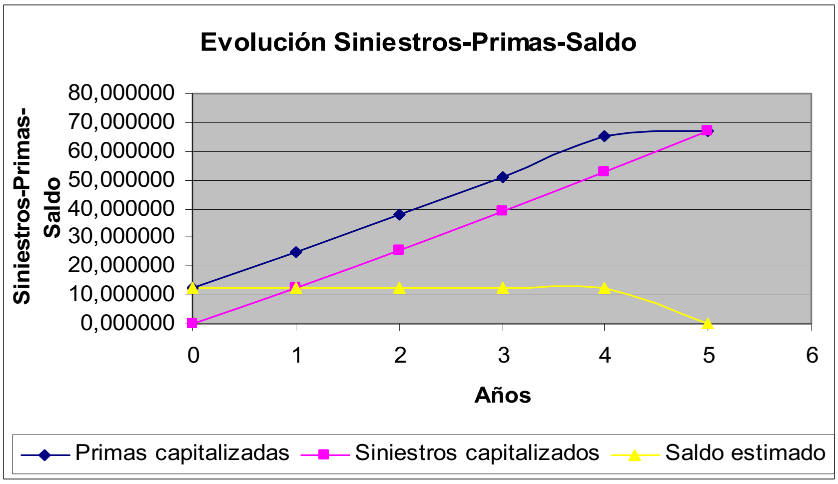
Podemos observar como los siniestros capitalizados y la prima capitalizada van creciendo durante el plazo de vigencia de la operación y como el saldo estimado disminuye hasta ser 0 al final del último año.

Si consideramos el mismo caso a primas periódicas anuales:

j	Prima periódica capitalizada	Siniestros acumulados capitalizados	Saldo estimado
0	12,231212	0	12,231212
1	24,829361	12,621449	12,207912
2	37,805454	25,580404	12,225049
3	51,170830	38,932224	12,238605
4	64,937172	52,701939	12,235232
5	66,885284	66,885284	0,000000

siendo 12,231212 la esperanza matemática de la prima periódica anual del reaseguro.

La evolución de la prima periódica capitalizada, los siniestros acumulados y el saldo estimado queda representada en la siguiente gráfica:



En este caso el saldo estimado se mantiene prácticamente constante durante los cuatro primeros años.

Modelo con revisión

En este caso nos planteamos calcular para el reaseguro *finite risk* Cuota Parte definido en el modelo anterior, el saldo estimado de la cuenta de experiencia para la cedente 1, revisando anualmente los parámetros de las funciones de distribución en función de la evolución de la siniestralidad real de cada cedente. Al igual que en el caso anterior estimaremos las variables aleatorias por simulación de Monte Carlo y realizaremos 50.000 simulaciones y asumiremos las mismas hipótesis respecto a los tipos de interés del modelo anterior $I_{1,R} = I_1 = 0,03$.

Supondremos que el número medio anual y el coste medio anual de siniestros a partir del origen del contrato y para los 4 años siguientes son:

Número de siniestros			
j	**k = 1**	**k = 2**	**k = 3**
1	3	9	7
2	5	8	6
3	4	6	5
4	5	9	8

Coste medio de los siniestros			
j	**k = 1**	**k = 2**	**k = 3**
1	4,0000	8,8000	8,7000
2	4,5000	6,0000	9,0000
3	5,0000	5,0000	4,0000
4	5,0000	8,0000	8,0000

La siguiente tabla muestra la evolución, para cada año, del estimador del número de siniestros $\hat{\lambda}_j(\theta_1)$, del estimador del coste de los siniestros

$\hat{\alpha}_j(\theta_1)$, de la esperanza matemática del saldo estimado $E(S^{e,j}_{j,(j,t]})$, su desviación tipo $D(S^{e,j}_{j,(j,t]})$ y de la esperanza matemática del saldo estimado $E(S^e_j)$ del modelo sin revisión.

j	$\hat{\lambda}_j(\theta_1)$	$\hat{\alpha}_j(\theta_1)$	$E(S^{e,j}_{j,(j,t]})$	$D(S^{e,j}_{j,(j,t]})$	$E(S^e_j)$
1	4,589	5,415	47,00491	15,4954	46,8052
2	4,591	5,516	36,4131	13,8375	35,6291
3	4,489	5,381	23,5704	11,1572	24,1136
4	4,546	5,571	2,4651	8,2584	12,2352

Para los datos de siniestralidad considerados podemos observar como el valor esperado del saldo estimado con revisión es mayor en los años 1, 2 y 4 que el que se hubiese dotado de no considerar la revisión de los parámetros.

Un aspecto interesante a destacar es ver como influye el saldo estimado de la cedente 1 cuando variamos la siniestralidad del resto de cedentes. Consideremos el siguiente supuesto: si en el año 4 el número medio y el coste medio de los siniestros de la cedente 1 permanecen iguales a los datos anteriores y por ejemplo disminuimos la siniestralidad del resto de cedentes, esta circunstancia afectará a los estimadores $\hat{\lambda}_4(\theta_1)$ y $\hat{\alpha}_4(\theta_1)$ y por tanto a su saldo estimado.

Supongamos que para el último año $j=4$, las cedentes 2 y 3 tuviesen un menor número medio y un menor coste medio anual de siniestros respecto a los datos anteriores:

Número de siniestros			
j	**k = 1**	**K = 2**	**k = 3**
4	5	7	5

Coste medio de los siniestros			
j	**k = 1**	**k = 2**	**k = 3**
4	5,0000	7,0000	6,0000

Bajo estas hipótesis:

j	$\hat{\lambda}_j(\theta_1)$	$\hat{\alpha}_j(\theta_1)$	$E(S^{e,j}_{j,(j,t]})$	$D(S^{e,j}_{j,(j,t]})$
4	4,523	5,418	9,6517	6,4480

el saldo estimado de la cedente 1 en el año 4 pasa de 12,4651 a 9,6517.

7. Consideraciones finales

En este trabajo hemos analizado el saldo o provisión de la cuenta de experiencia en un reaseguro *finite risk*. Para su determinación hemos utilizado dos enfoques, modelo sin revisión y modelo con revisión.

En el modelo sin revisión hemos asumido que los parámetros de siniestralidad se mantienen constantes a lo largo del plazo de vigencia de la operación y, por tanto, no se contempla la revisión de los mismos. De tal forma, que en el origen de la operación, hemos calculado el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año. Las posibles aportaciones que garanticen el saldo estimado se deberán de calcular a posteriori una vez conocido el saldo real.

En el modelo con revisión, el saldo estimado no se calcula en el origen de la operación sino al final de cada uno de los periodos anuales del contrato, ya que en este caso contemplamos la revisión de los parámetros de las funciones de distribución, ajustándolos a la información de siniestralidad conocida hasta ese momento.

Hemos supuesto que la cartera del reasegurador está formado por tres cedentes del mismo ramo y para la estimación de los parámetros de siniestralidad hemos utilizado modelos de credibilidad, para tener en cuenta tanto la experiencia individual como la de la cartera.

En la aplicación numérica del modelo con revisión, se pone de manifiesto como el saldo estimado de una cedente depende no sólo de la experiencia individual de siniestralidad, sino también de la experiencia del resto de cedentes que componen la cartera.

Bibliografía

Bühlmann, H. (1967). Experience rating and credibility. *Astin Bulletin*, vol. 4, part 3, 199-207.

Bühlmann, H; Straub, E. (1970). Glanbwürdigkeit für schadensätze. *MVSVM,* vol. 70, Heft 1, 111-133.

Dubey, A.; Gisler, A. (1981). On parameter estimators in credibility. *MVSVM*, vol. 81, Heft 2, 107-122.

Durá, J.M.; López, J.M. (1988). *Fundamentos de estadística*. EDITORIAL ARIEL, Madrid (España).

Norberg, R. (1979). The credibility approach to experience rating. *SAJ*, nº 4, 181-221.
Pitacco, E. (1986). Simulation in Insurance. *In M. Goovaerts (eds.) Insurance and Risk Theory*, D. Reidel Publishing Company.
Sarrasí Vizcarra, F.J.; Pérez Frutuoso, M.J. (2003). Una aproximación al reaseguro financiero en la modalidad de finite risk. *Gerencia de Riesgos y Seguros*, nº 82, 2º trimestre, 21-32. Madrid (España).
Swiss Re. (1977). La transferencia alternativa de riesgos mediante el seguro finite risk. *Suiza de reaaseguros. Sigma nº 5.*