

## DISEÑO DE SISTEMAS BONUS-MALUS EN EL CASO TRANSITORIO

Antonio Heras Martínez, \* José A. Gil Fana \* y José L. Vilar Zanón \*

**Resumen.-** A la hora de diseñar un sistema bonus-malus no parece adecuado considerar sólo sus características una vez que ha alcanzado el estado estacionario sino que se ha de tener en cuenta un horizonte temporal de amplitud suficiente y, su evolución a lo largo del mismo.

En relación con el caso transitorio Borgan, Hoem, y Norberg (1981), establecen un nuevo criterio de evaluación de un sistema bonus-malus que generaliza el criterio asintótico de Norberg (1976).

En este trabajo estudiaremos cómo la metodología propuesta por Heras, A.; Vilar, J.L. y Gil, J.A (2002) y Heras, A.; Gil, J.A, García-Pineda, P. y Vilar, J.L. (2004) para el diseño de sistemas bonus-malus en el caso estacionario, fundamentada en la programación por metas, se adapta perfectamente al caso transitorio.

**Palabras clave.-** Sistemas bonus-malus. Escala de Bayes. Caso transitorio. Programación por metas.

**Abstract.-** When we design a bonus-malus system it doesn't seem appropriate to consider only their characteristics once the stationary state has been reached. Rather we must keep in mind a time horizon of sufficiently large as well as its evolution. This is known as the transient case.

In connection with it, Borgan, Hoem, and Norberg (1981) propose a new approach for the evaluation of a bonus-malus system that generalizes the Norberg's asymptotic approach (1976).

---

\* Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales . Universidad Complutense de Madrid. Campus de Somosaguas. 28223 Pozuelo de Alarcón.

Este artículo se ha recibido en versión revisada el 25 de junio de 2010.

In this work we will study how the methodology proposed in Heras, A.; Vilar, J.L. and Gil, J.A (2002) and Heras, A.; Gil, J.A, García-Pineda, P. and Vilar, J.L. (2004) in the bonus-malus systems design which is based in goal programming, applies well to the transient case.

**Key Words.-** Bonus-Malus Systems. Bayes Scale. Transient case. Goal programming.

### 1.- Sistemas bonus-malus.

Dado un grupo de riesgo,  $s$  el de riesgo de cada póliza viene representado por un  $\lambda$  hero esperado de siniestros por periodo. Supondremos  $\lambda$  erminar el verdadero valor de este parámetro para cada póliza y que existe una variable aleatoria  $\Lambda$  (*la variable de estructura*) cuyas realizaciones son los valores del parámetro de riesgo para las pólizas pertenecientes al grupo. La función de distribución asociada a la variable de estructura será representada como  $U(\lambda)$  y denominada función de estructura. Supondremos, además que  $\Lambda$  es independiente del tiempo. Las variables aleatorias  $N_t / \Lambda=\lambda$ , número de siniestros de una póliza en sucesivos periodos condicionados a algún valor de  $\lambda$ , se supone que son mutuamente independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a una distribución de Poisson de media  $\lambda$ . Por tanto, la variable aleatoria no condicionada  $N_t$  seguirá una distribución de Poisson ponderada por la función de estructura. Supondremos también que las cuantías de los siniestros individuales  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  son independientes del número de siniestros y de la variable de estructura, y mutuamente independientes e idénticamente distribuidas con media  $E\{X\} < \infty$ . Tomaremos esta última como unidad monetaria, de tal forma que la prima pura de una póliza con parámetro de riesgo  $\lambda$  será igual a  $\lambda$  medido en unidades de  $E\{X\}$ .

Finalmente, nos situaremos en el caso más sencillo en el que las variables aleatorias  $N_t / \Lambda=\lambda$ ,  $N_t$  y  $X$  son independientes de la elección del sistema bonus-malus, esto es, no tendremos en cuenta el hambre de bonus.

DISEÑO DE  
SISTEMAS  
BONUS-MALUS  
EN EL CASO  
TRANSITORIO  
Antonio Heras  
Martínez \* José

Siguiendo a Lemaire (1995, pág. 6), diremos que una compañía de seguros utiliza un *Sistema Bonus-Malus* (SBM) cuando se verifican las condiciones siguientes:

- Existen únicamente un número finito de clases  $C_1, \dots, C_n$  tales que cada póliza permanece en una sola clase durante un periodo de tiempo (habitualmente un año).
- La prima correspondiente a cada póliza depende únicamente de la clase en que se encuentra.
- La clase a la que pertenece un asegurado durante un cierto periodo depende únicamente de la clase a la que pertenecía durante el periodo anterior y del número de siniestros durante dicho periodo (*Condición Markoviana*).

Por tanto, un SBM consta de tres elementos:

- La *clase inicial*,  $C_0$  a la que son asignados los nuevos asegurados.
- La *escala de tarifas*,  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  en la que se establecen las primas asociadas a cada clase.
- Las *reglas de transición*, que determinan cuándo se pasa de una clase a otra, y vienen dadas por unas transformaciones  $T_k$  tales que  $T_k(i)=j$  si se pasa de  $C_i$  a  $C_j$  cuando se tienen  $k$  siniestros.  $T_k$  se puede expresar matricialmente:

$$T_k = (t_{ij}^k)$$

donde

$$t_{ij}^k = 1 \quad \text{si } T_k(i) = j$$

$$t_{ij}^k = 0 \quad \text{si } T_k(i) \neq j$$

La *Probabilidad de Transición* de  $C_i$  a  $C_j$  para un asegurado de parámetro  $\lambda = \lambda_0$  se calcula como

$$p_{ij}(\lambda_0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda_0) t_{ij}^k$$

donde

$$p_k(\lambda_0) = \Pr[N = k / \lambda = \lambda_0]$$

Las *Matrices de Transición* condicionadas serán

$$\mathbf{P}(\lambda_0) = (p_{ij}(\lambda_0))$$

Las hipótesis anteriores permiten modelizar el comportamiento de cada asegurado de parámetro  $\lambda_0$  en el SBM mediante una *Cadena de Markov* (con matriz de transición  $\mathbf{P}(\lambda_0)$ ).

Si suponemos, como es habitual, que la cadena es *ergódica* (es decir, que siempre es posible acceder a una clase dada a partir de cualquier otra, en un número finito de pasos) y *sin ciclos*, entonces, como es bien sabido, la teoría de las Cadenas de Markov nos asegura la existencia de una *distribución estacionaria de probabilidades*  $(\Pi_1(\lambda_0), \dots, \Pi_n(\lambda_0))$  que representa el comportamiento a largo plazo de dicha póliza.  $\Pi_k(\lambda_0)$  se interpreta como la probabilidad de que la póliza de parámetro  $\lambda_0$  se encuentre en la clase  $k$  cuando, pasado cierto tiempo, el sistema alcanza o al menos se aproxima a su estado estacionario

La distribución estacionaria no es difícil de calcular, demostrándose que coincide con el autovector por la izquierda de la matriz de transición asociado con el autovalor unidad (el *autovalor de Fröbenius*) y cuyas componentes suman la unidad.

Además de las probabilidades estacionarias condicionadas al valor de  $\lambda$ , es posible definir las probabilidades estacionarias no condicionadas  $(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ , con una interpretación similar pero referida a una póliza arbitraria. Tales probabilidades se definen como

$$\Pi_s = \int_0^\infty \Pi_s(\lambda) dU(\lambda)$$

Y si suponemos adecuadamente discretizada la función de estructura:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \quad \text{prob}(\lambda_1) \\ \dots \\ \lambda_r \quad \text{prob}(\lambda_r) \end{array} \right\},$$

se cumplirá también

$$\Pi_s = \sum_{i=1}^r \Pi_s(\lambda_i) \cdot \text{prob}(\lambda_i)$$

Ahora bien en este trabajo queremos tener en cuenta en el momento de diseñar un SBM, no la situación del mismo una vez que todas las pólizas que lo integran han alcanzado el estado estacionario sino que hemos de

considerar que en la práctica en el sistema existen pólizas de diferente antigüedad y por ello algunas de ellas muy alejadas del estado estacionario.

Para ello hemos de disponer de otras probabilidades:

--  $\Pi_s^k(\lambda_i)$ : Probabilidad de que una póliza de parámetro  $\lambda_i$  se encuentre en la clase  $s$  a los  $k$  años de antigüedad de la póliza.

El correspondiente vector de probabilidades es

$$\Pi^k(\lambda_i) = (\Pi_1^k(\lambda_i), \dots, \Pi_n^k(\lambda_i)).$$

Ciertamente, si  $\Pi^0(\lambda_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , es claro que,

$$\Pi^k(\lambda_i) = \Pi^0(\lambda_i) \cdot \mathbf{P}^k(\lambda_i).$$

Asimismo, las correspondientes probabilidades descondicionadas,

$$\Pi_s^k = \sum_{i=1}^r \Pi_s^k(\lambda_i) \cdot \text{prob}(\lambda_i) \left( = \int_0^{\infty} \Pi_s^k(\lambda) \cdot dU(\lambda) \right)$$

## 2.- Diseño de un SBM. Caso Transitorio.

Se suelen distinguir tres problemas en la construcción de un SBM:

- La elección del número de clases y de las reglas de transición.
- La elección de la clase inicial.
- El cálculo de la prima correspondiente a cada clase.

Es intuitivamente claro que el conocimiento de la distribución estacionaria puede resultar muy útil a la hora de diseñar un SBM, ya que nos informa de cuál será aproximadamente el comportamiento de las pólizas cuando haya transcurrido cierto tiempo.

Además, si tenemos en cuenta que en la realidad se producen ingresos y salidas de pólizas, lo que implica que una parte de las mismas se encuentren lejos del estado estacionario, el vector de estado del sistema, que nos proporciona la probabilidad de que una póliza se encuentre en las distintas

clases del sistema puede diferir de forma importante de la distribución estacionaria.

El primer problema de los citados más arriba, continúa abierto: no es posible todavía encontrar el número de clases y las reglas de transición óptimas en general, aunque sí es posible concluir que ciertas reglas son mejores que otras en base a ciertas medidas de eficiencia.

La elección de una clase inicial óptima no puede basarse en la distribución estacionaria, ya que esta última no depende de dicha clase inicial (lo que sí depende de la clase inicial es, obviamente, la velocidad de convergencia a la distribución estacionaria). Sin embargo, este es un problema que si existe en el ámbito del modelo transitorio.

Por tanto, cuando hablamos de diseño “óptimo” de un SBM nos referiremos al tercer problema anteriormente mencionado, el de encontrar unas primas “óptimas” que en el caso transitorio incluye el de determinar la prima de entrada.

Pero todavía queda por aclarar en qué sentido, es decir, respecto a qué función objetivo, deben ser óptimas las primas.

La consecución de tarifas equitativas constituye la razón de ser de cualquier SBM, parece intuitivamente claro que la optimalidad de las primas deberá definirse respecto a este criterio. En otras palabras, el objetivo del diseño debe ser maximizar la *equidad* del sistema resultante

El diseño de un SBM en el caso asintótico ha sido ampliamente tratado en la literatura actuarial. Norberg (1976) retoma una idea de Pesonen (1963) establece como prima asociada a una clase de bonus-malus la esperanza matemática de la siniestralidad anual de una póliza "infinitamente vieja" perteneciente a esa clase, demostrando que la escala así establecida (conocida como **escala de Bayes**) minimiza el **error cuadrático de tarificación esperado**.

En definitiva, para unas reglas de transición dadas, se trata de obtener los valores de  $b_1, b_2, \dots, b_n$  que maximizan la equidad del sistema, medido por el error cuadrático medio de tarificación, haciendo mínima la siguiente función:

$$Q_{Ba}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (\lambda_i - b_j)^2 \Pi_j(\lambda_i) \text{prob}(\lambda_i) \quad (2.1)$$

Heras, Vilar y Gil (2002) proponen una nueva medida para la evaluación de la equidad de un SBM que sirve de fundamento a un nuevo criterio asintótico para la determinación de las primas.

$$Q_{Ma}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^r \left| \sum_{j=1}^n \Pi_j(\lambda_i) \cdot b_j - \lambda_i \right| \text{prob}(\lambda_i), \quad (2.2)$$

que permite obtener las primas optimas mediante la resolución de un programa lineal en el marco de la programación por metas.

Y en Heras, Gil, G<sup>a</sup> Pineda y Vilar (2004) se analizan las posibilidades de esta metodología para el diseño de SBM en el caso asintótico.

Centrándonos en el caso transitorio Borgan, O., Hoem, J.M. y Norberg, R. (1981) establecen un nuevo criterio de evaluación de un SBM que generaliza el criterio asintótico de Norberg (1976).

A continuación analizaremos el modelo de los citados autores y a la vez una nueva propuesta que generaliza (2.2) al caso transitorio.

Teniendo en cuenta que en la cartera existen pólizas de diferentes años de antigüedad, la función objetivo que proponen los autores es:

$$Q_{Bt}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{t=0}^{\infty} w_t \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n (\lambda_i - b_j)^2 \Pi_j^t(\lambda_i) \text{prob}(\lambda_i) \quad (2.3)$$

que pondera los errores cuadráticos medios de tarificación de cada uno de los posibles años de antigüedad de las pólizas.

Las primas que minimizan esta función son:

$$b_s = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} w_t \sum_{i=1}^r \lambda_i \Pi_s^t(\lambda_i) \text{prob}(\lambda_i)}{\sum_{t=0}^{\infty} w_t \sum_{i=1}^r \Pi_s^t(\lambda_i) \text{prob}(\lambda_i)} \quad s = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

y verifican

$$\sum_{s=1}^n b_s \sum_{t=0}^{\infty} w_t \Pi_s^t = \sum_{t=0}^{\infty} w_t E(\lambda) \quad (2.5)$$

Es posible establecer distintos pesos  $w$  para los errores de tarificación. Algunos de ellos dan una interesante interpretación de (2.3) como objetivo de equidad.

En el citado trabajo los autores consideran  $t=0$  el estado estacionario, nosotros, sin pérdida de generalidad supondremos que, como sucede en la realidad, una póliza no estará en vigor más de  $m$  años (edad límite) por lo que no alcanzará el estado estacionario.

Supondremos además que existen unos “tantos medios de permanencia” de una póliza en el sistema, tales que  ${}_0p = 1$  y  ${}_{m+1}p = 0$  ( ${}_r p$  es la probabilidad de que una póliza alcance  $r$  años de antigüedad en el sistema). Ahora  $t=0$  es el año de entrada en el sistema.

Consideremos tres posibles ponderaciones:

**2.1.-  $w_i$  es la proporción del total de pólizas con  $i$  años de antigüedad.**

Es posible suponer que a partir de una determinada antigüedad del sistema la citada distribución de edades se mantiene invariable. Basta aceptar además que el número de pólizas que cada año entra en el sistema es constante.

Siendo

$$w_i = \frac{{}_i p}{\sum {}_i p} \quad i = 0, \dots, m$$

Si tenemos una distribución de edades invariable con el tiempo ( $w_0, w_1, \dots, w_m$ ) son constantes las probabilidades

$$\bar{\Pi}_s(\lambda_i) = w_0 \cdot \Pi_s^0(\lambda_i) + \dots + w_m \cdot \Pi_s^m(\lambda_i)$$

de que una póliza de parámetro  $\lambda_i$  se encuentre en la clase  $s$ , y

$$\bar{\Pi}_s = w_0 \cdot \Pi_s^0 + \dots + w_m \cdot \Pi_s^m$$

de que una póliza cualquiera se encuentre en la clase  $s$ .

Las primas que minimizan (1.3) son ahora



$$b_s = \frac{\sum_{t=0}^m w_t \sum_{i=1}^r \lambda_i \Pi_s^t(\lambda_i) \text{prob}(\lambda_i)}{\sum_{t=0}^m w_t \sum_{i=1}^r \Pi_s^t(\lambda_i) \text{prob}(\lambda_i)} \quad s = 1, \dots, n$$

y verifican la igualdad

$$b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n = E(\lambda),$$

que puede interpretarse como que, en cada ejercicio, la prima media pagada por una póliza arbitraria es igual a su siniestralidad esperada (equilibrio financiero para el conjunto de la cartera).

No hay ningún problema en generalizar al caso transitorio la solución dada mediante la programación por metas. La equidad del sistema se medirá ahora de forma distinta: para una póliza de parámetro  $\lambda_i$  el sistema será más equitativo cuanto menor sea la diferencia entre la prima media pagada por dicha póliza  $\sum_{j=1}^n b_j \bar{\Pi}_j(\lambda_i)$  y la esperanza matemática de su siniestralidad  $\lambda_i$ .

La función objetivo del mismo será,

$$Q_{Mt}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^r \left| \sum_{j=1}^n b_j \bar{\Pi}_j(\lambda_i) - \lambda_i \right| \cdot \text{prob}(\lambda_i) \quad (2.6)^*$$

Notemos que

$$\sum_{j=1}^n b_j \bar{\Pi}_j(\lambda_i) - \lambda_i = \sum_{r=0}^m (b_1 \Pi_1^r(\lambda_i) + \dots + b_n \cdot \Pi_n^r(\lambda_i) - \lambda_i) w_r$$

Minimizar esta función es equivalente a resolver el siguiente programa lineal

---

\* (2.1), (2.2), (2.3) y (2.6) son medidas de eficiencia (equidad) del sistema bonus-malus. Nos permiten comparar distintos sistemas en cuanto a clase de entrada, reglas de transición, escalas de primas y otras restricciones.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_i \text{prob}(\lambda_i) \cdot (y_i^+ + y_i^-) \\ & \left. \begin{aligned} & b_1 \cdot \bar{\Pi}_1(\lambda_1) + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n(\lambda_1) + y_1^- - y_1^+ = \lambda_1 \\ & \dots\dots\dots \\ & b_1 \cdot \bar{\Pi}_1(\lambda_r) + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n(\lambda_r) + y_r^- - y_r^+ = \lambda_r \end{aligned} \right\} \quad (2.7) \end{aligned}$$

+ Restricciones comerciales y técnicas.

Estas restricciones técnicas y comerciales han de ser establecidas como restricciones lineales en las primas. Afortunadamente la mayoría de ellas pueden establecerse de esa forma.

\*\* Límites a los incrementos entre primas sucesivas,

$$b_{i+1} \leq t_1 \cdot b_i$$

$$b_{i+1} \geq t_2 \cdot b_i$$

\*\* Diferencia entre las primas de la primera y última clases,

$$b_n \leq t \cdot b_1$$

\*\* Elasticidad para algunos valores de  $\lambda$ .

Ciertamente es posible dar distintas definiciones de elasticidad en el caso transitorio. En este caso parece natural definir la elasticidad para una póliza de parámetro  $\lambda$  como:

$$\eta(\lambda) = \frac{\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}}{\frac{P(\lambda)}{\lambda}},$$

en ella

$$P(\lambda) = b_1 \cdot \bar{\Pi}_1(\lambda) + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n(\lambda).$$

es la prima media pagada por una póliza cualquiera de parámetro  $\lambda$  y  $\eta(\lambda)$  nos expresa la variación porcentual en la misma para una variación porcentual en  $\lambda$ . Considerada como medida de eficiencia dicho valor, al menos para los valores mas significativos de  $\lambda$  ha de ser cercano a uno.

Notemos que las probabilidades  $\bar{\Pi}_i(\lambda)$   $i = 1, \dots, n$  dependen de la clase de entrada.

Fijado el valor de la elasticidad,  $\varepsilon$ , para un determinado  $\lambda$ , la restricción

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} - \varepsilon \frac{P(\lambda)}{\lambda} \leq 0$$

es lineal en las primas.

\*\* Superar un determinado valor del RSAL,

$$RSAL = \frac{P - b_1}{b_n - b_1}$$

con

$$P = b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n$$

Fijado un valor R para esa magnitud, la restricción

$$b_1 \cdot (\bar{\Pi}_1(\lambda) - 1 + R) + b_2 \cdot \bar{\Pi}_2(\lambda) + \dots + b_n \cdot (\bar{\Pi}_n - R) \leq 0$$

es lineal.

\*\* Equilibrio financiero.

Anteriormente comentamos que la escala de Bayes (caso transitorio) posee la propiedad de equilibrio financiero,

$$b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n = E(\lambda) \quad (2.8)$$

Esta es una restricción lineal que podrá introducirse sin dificultad en el programa de programación por metas.

## 2.2.- Tomemos ahora $w_s = (1+i)^{-s} = v^s$ $s = 0 \dots m$

Se trata ahora de minimizar el valor actual de los errores cuadráticos medios de tarificación.

Las primas que minimizan (2.3) son (2.4) y verifican

$$b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n = \ddot{a}_{\overline{m+1}|} E(\lambda)$$

Para una póliza arbitraria de nuevo ingreso en la cartera el valor actual de los ingresos futuros esperados por primas iguala al valor actual de su siniestralidad esperada.

Esta es una propiedad de equilibrio financiero que no implica como la del caso anterior que los ingresos por primas de cada año coincidan con la esperanza de la siniestralidad.

En la propuesta de programación por metas la función objetivo será,

$$Q_{Mt}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^r \left| \sum_{j=1}^n b_j \bar{\Pi}_j(\lambda_i) - \ddot{a}_{\overline{m+1}|} \lambda_i \right| \cdot \text{prob}(\lambda_i)$$

Para una póliza de parámetro  $\lambda_i$  el sbm es más equitativo cuanto más pequeña es la diferencia entre el valor actual de las primas medias pagadas y el valor actual de sus siniestralidades esperadas.

Minimizar esta función es equivalente a resolver el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_i \text{prob}(\lambda_i) \cdot (y_i^+ + y_i^-) \\ & \left. \begin{aligned} & b_1 \bar{\Pi}_1(\lambda_1) + \dots + b_n \bar{\Pi}_n(\lambda_1) + y_1^- - y_1^+ = \ddot{a}_{\overline{m+1}|} \lambda_1 \\ & \dots\dots\dots \\ & b_1 \bar{\Pi}_1(\lambda_r) + \dots + b_n \bar{\Pi}_n(\lambda_r) + y_r^- - y_r^+ = \ddot{a}_{\overline{m+1}|} \lambda_r \end{aligned} \right\} \quad (2.9) \end{aligned}$$

+ Restricciones comerciales y técnicas.

Las restricciones básicas pueden escribirse como

$$\begin{aligned} & (b_1 \Pi_1^0(\lambda_i) + \dots + b_n \Pi_n^0(\lambda_i) - \lambda_i) + (b_1 \Pi_1^1(\lambda_i) + \dots + b_n \Pi_n^1(\lambda_i) - \lambda_i)v + \dots \\ & \dots\dots + (b_1 \Pi_1^m(\lambda_i) + \dots + b_n \Pi_n^m(\lambda_i) - \lambda_i)v^m + y_i^- - y_i^+ = 0 \end{aligned}$$

Lo que nos indica el tipo de equidad buscada por el modelo.

Restricción de equilibrio financiero:

Anteriormente comentamos que la escala de Bayes (caso transitorio) posee la propiedad de equilibrio financiero,

$$b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n = \ddot{a}_{\overline{m+1}|} E(\lambda) \quad (2.10)$$

Tal restricción es lineal.

Notemos que esta última restricción también puede escribirse como,

$$(b_1 \cdot \Pi_1^0 + \dots + b_n \cdot \Pi_n^0 - E(\lambda)) + (b_1 \cdot \Pi_1^1 + \dots + b_n \cdot \Pi_n^1 - E(\lambda)) \cdot v + \dots + (b_1 \cdot \Pi_1^m + \dots + b_n \cdot \Pi_n^m - E(\lambda)) \cdot v^m = 0$$

que posee sencilla interpretación.

Pero en el modelo de metas no hay ningún problema en exigir la restricción más deseable

$$b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n = E(\lambda)$$

Elasticidad:

Lemaire (1995, cap. 6) propone una expresión perfectamente compatible con las hipótesis de este modelo para la elasticidad. En ella  $P(\lambda)$  es el valor actual de la esperanza de los pagos por primas realizados por un asegurado de parámetro  $\lambda$ .

Supuesto que la clase de entrada es la  $C_j$  y si denominamos ahora

$$P(\lambda) = P^0(\lambda) + (1+i)^{-1} \cdot P^1(\lambda) + \dots + (1+i)^{-m} \cdot P^m(\lambda)$$

siendo

$$P^s(\lambda) = b_1 \cdot \Pi_1^s(\lambda) + \dots + b_n \cdot \Pi_n^s(\lambda) \quad s = 0, \dots, m$$

(notemos que  $P^0(\lambda) = b_j$ ).

$$\tilde{\eta}(\lambda) = \frac{\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}}{\frac{P(\lambda)}{\lambda}}$$

**2.3.- sea ahora**  $w_s = (1+i)^{-s} \cdot {}_s p = v^s \cdot {}_s p \quad s = 0 \dots m$

${}_s p$  es la probabilidad de que una póliza alcance una antigüedad de  $s$  años.

( ${}_0 p = 1$ ).

Sea

$$\ddot{a} = 1 + v_1 p + v_1^2 p^2 + \dots + v_1^m p^m$$

(2.3) sigue siendo válida. Se trata de minimizar el valor actual esperado de los errores de tarificación.

Las primas que minimizan (2.3) son (2.4) y la condición de equilibrio financiero obedece a,

$$b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n = \ddot{a} \cdot E(\lambda)$$

En la propuesta de programación por metas la función objetivo del mismo será,

$$Q_{Mt}(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^r \left| \sum_{j=1}^n b_j \bar{\Pi}_j(\lambda_i) - \ddot{a} \cdot \lambda_i \right| \cdot \text{prob}(\lambda_i)$$

Minimizar esta función es equivalente a resolver el siguiente programa lineal

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } \sum_i \text{prob}(\lambda_i) \cdot (y_i^+ + y_i^-) \\ b_1 \cdot \bar{\Pi}_1(\lambda_1) + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n(\lambda_1) + y_1^- - y_1^+ = \ddot{a} \cdot \lambda_1 \\ \dots\dots\dots \\ b_1 \cdot \bar{\Pi}_1(\lambda_r) + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n(\lambda_r) + y_r^- - y_r^+ = \ddot{a} \cdot \lambda_r \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

+ Restricciones comerciales y técnicas.

Las restricciones básicas pueden escribirse como

$$(b_1 \Pi_1^0(\lambda_i) + \dots + b_n \Pi_n^0(\lambda_i) - \lambda_i) + (b_1 \Pi_1^1(\lambda_i) + \dots + b_n \Pi_n^1(\lambda_i) - \lambda_i) v_1 p + \dots + (b_1 \Pi_1^m(\lambda_i) + \dots + b_n \Pi_n^m(\lambda_i) - \lambda_i) v_1^m p + y_i^- - y_i^+ = 0$$

Lo que nos indica el tipo de equidad buscada por el modelo.

\*\* Equilibrio financiero.

Anteriormente comentamos que la escala de Bayes (caso transitorio) posee la propiedad de equilibrio financiero,

$$b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n = \ddot{a} E(\lambda) \quad (2.12)$$

Tal restricción es lineal.

Pero en el modelo de metas no hay ningún problema en exigir la restricción más deseable

$$b_1 \cdot \bar{\Pi}_1 + \dots + b_n \cdot \bar{\Pi}_n = E(\lambda)$$

Elasticidad

Si denominamos ahora

$$P(\lambda) = P^0(\lambda) + (1+i)^{-1} p \cdot P^1(\lambda) + \dots + (1+i)^{-m} \cdot p \cdot P^m(\lambda),$$

siendo

$$P^s(\lambda) = b_1 \cdot \Pi_1^s(\lambda) + \dots + b_n \cdot \Pi_n^s(\lambda) \quad s = 0, \dots, m,$$

(notemos que  $P^0(\lambda) = b_j$ ).

$$\tilde{\eta}(\lambda) = \frac{\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}}{\frac{P(\lambda)}{\lambda}}$$

### 3.- Ejemplo.

Desarrollaremos a continuación un ejemplo numérico en el que analizaremos algunas de las posibilidades de las propuestas teóricas planteadas en los apartados anteriores con lo que creemos que quedará suficientemente probada la flexibilidad de la metodología de la programación por metas para el diseño de sistemas bonus-malus.

Consideremos una cartera de autos con las siguientes características:

\* La función de estructura discreta

$\lambda_i$	0.033	0.066	0.099	0.132	0.165	0.198	0.231	0.264	0.297	0.330
$p(\lambda_i)$	0.28770	0.21179	0.23174	0.06609	0.08872	0.02623	0.03636	0.01126	0.01592	0.00510

$\lambda_i$	0.363	0.396	0.429	0.462	0.495	0.528	0.561	0.594	0.627	0.660
$p(\lambda_i)$	0.00732	0.00240	0.00348	0.00116	0.00171	0.00058	0.00085	0.00029	0.00043	0.00078

procede de la aplicación del método de discretización de Vilar (2000) a la función de estructura continua correspondiente a una **distribución inversa gaussiana** de parámetros  $g$  y  $h$ .

$$u(\lambda) = \frac{g}{\sqrt{2\pi h \lambda^{3/2}}} e^{-\frac{1}{2h\lambda}(\lambda-g)^2} \quad g, h > 0$$

con  $g=0.101081$  y  $h=0.062981$ , tomada de Lemaire (1995, págs 35 a 37).

\* Las reglas de transición del SBM son las siguientes:

Clase	Clase después de siniestros				
	0	1	2	3	$\geq 4$
10	9	10	10	10	10
9	8	10	10	10	10
8	7	10	10	10	10
7	6	9	10	10	10
6	5	8	10	10	10
5	4	7	9	10	10
4	3	6	8	9	10
3	2	5	7	9	10
2	1	4	6	7	9
1	1	3	5	6	8

Asimismo la probabilidad de que una póliza alcance una antigüedad de  $i$  años es

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$iP$	0.98	0.95	0.92	0.90	0.88	0.85	0.82	0.79	0.76	0.71
$i$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$iP$	0.66	0.60	0.52	0.45	0.36	0.28	0.19	0.07	0	

Analicemos algunos ejemplos:



3.1.- Si suponemos que el número de ingresos es constante la distribución de edades estacionaria es la siguiente:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
w <sub>i</sub>	0.0788	0.0772	0.0749	0.0725	0.0709	0.0693	0.0670	0.0646	0.0622	0.0599
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
w <sub>i</sub>	0.0559	0.0520	0.0472	0.0410	0.0354	0.0283	0.0221	0.0150	0.0055	0

En la tabla 1 tenemos la escala de Bayes transitoria para cada una de las clases de entrada i EB<sup>i</sup> (notemos la importancia de la elección de la clase de entrada) y la escala de bayes asintótica EB<sup>a</sup>

Notemos que desde el punto de vista de la equidad, esta es máxima, si la clase de entrada es la 3 (menor valor de Q<sub>Bt</sub>)

i	EB <sup>1</sup>	$\frac{EB_{i+1}^1}{EB_i^1}$	EB <sup>2</sup>	$\frac{EB_{i+1}^2}{EB_i^2}$	EB <sup>3</sup>	$\frac{EB_{i+1}^3}{EB_i^3}$	EB <sup>4</sup>	$\frac{EB_{i+1}^4}{EB_i^4}$	EB <sup>5</sup>	$\frac{EB_{i+1}^5}{EB_i^5}$	EB <sup>6</sup>	$\frac{EB_{i+1}^6}{EB_i^6}$
1	0.0884	1.461	0.0865	1.293	0.0846	1.274	0.0828	1.259	0.0809	1.243	0.0791	1.229
2	0.1290	1.055	0.1119	1.199	0.1079	1.065	0.1043	1.060	0.1007	1.060	0.0972	1.058
3	0.1363	1.322	0.1342	1.272	0.1149	1.400	0.1106	1.045	0.1067	1.039	0.1029	1.039
4	0.1810	1.085	0.1707	1.130	0.1609	1.099	0.1156	1.426	0.1109	1.049	0.1069	1.045
5	0.1960	1.221	0.1929	1.199	0.1769	1.244	0.1649	1.127	0.1163	1.458	0.1117	1.038
6	0.2328	1.105	0.2312	1.115	0.2194	1.111	0.1858	1.227	0.1696	1.119	0.1160	1.492
7	0.2611	1.161	0.2578	1.153	0.2437	1.172	0.2280	1.139	0.1897	1.263	0.1731	1.133
8	0.3029	1.118	0.2972	1.125	0.2857	1.127	0.2598	1.176	0.2396	1.148	0.1961	1.292
9	0.3381	1.130	0.3344	1.138	0.3220	1.149	0.3056	1.147	0.2751	1.201	0.2534	1.170
10	0.3856	$\frac{EB_{10}^1}{EB_1^1}$ =4.36	0.3807	$\frac{EB_{10}^2}{EB_1^2}$ =4.39	0.3701	$\frac{EB_{10}^3}{EB_1^3}$ =4.37	0.3506	$\frac{EB_{i+1}^4}{EB_i^4}$ =4.23	0.3303	$\frac{EB_{i+1}^5}{EB_i^5}$ =4.07	0.2964	$\frac{EB_{10}^6}{EB_1^6}$ =3.74
Q <sub>Bt</sub>	0.00512		0.00509		0.00507		0.00511		0.00516		0.00524	

i	EB <sup>7</sup>	$\frac{EB_{i+1}^7}{EB_i^7}$	EB <sup>8</sup>	$\frac{EB_{i+1}^8}{EB_i^8}$	EB <sup>9</sup>	$\frac{EB_{i+1}^9}{EB_i^9}$	EB <sup>10</sup>	$\frac{EB_{i+1}^{10}}{EB_i^{10}}$	EB <sup>a</sup>	$\frac{EB_{i+1}^a}{EB_i^a}$
1	0.0773	1.215	0.0755	1.204	0.0741	1.192	0.0731	1.182	0.0824	1.315
2	0.0939	1.057	0.0909	1.057	0.0884	1.058	0.0864	1.058	0.1222	1.047
3	0.0993	1.040	0.0961	1.039	0.0935	1.040	0.0914	1.043	0.1279	1.357
4	0.1033	1.045	0.0998	1.047	0.0973	1.048	0.0953	1.049	0.1735	1.088
5	0.1079	1.038	0.1046	1.039	0.1020	1.043	0.1000	1.045	0.1888	1.240
6	0.1120	1.046	0.1087	1.046	0.1064	1.046	0.1045	1.050	0.2342	1.119
7	0.1172	1.529	0.1137	1.050	0.1113	1.049	0.1097	1.051	0.2621	1.160
8	0.1792	1.154	0.1194	1.583	0.1168	1.057	0.1153	1.056	0.3040	1.116
9	0.2068	1.321	0.1890	1.178	0.1234	1.656	0.1217	1.064	0.3392	1.117
10	0.2732	$\frac{EB_{10}^7}{EB_1^7}$ =3.53	0.2226	$\frac{EB_{10}^8}{EB_1^8}$ =2.94	0.2036	$\frac{EB_{10}^9}{EB_1^9}$ =2.74	0.1295	$\frac{EB_{10}^{10}}{EB_1^{10}}$ =1.76	0.3303	$\frac{EB_{10}^5}{EB_1^5}$ =4.07
Q <sub>Bt</sub>	0.00534		0.00550		0.005686		0.005933			

(Tabla 1)

Comparemos estos resultados en la tabla 2 con los que se obtienen con el modelo de programación por metas con las siguientes restricciones: equilibrio financiero (2.8), las primas de clases consecutivas se incrementan entre un 5% y un 60% y la prima de la clase 10 es como máximo cinco veces mayor que la de la clase 1. También se incluye la escala de metas asintótica con esas mismas restricciones. Además en la última fila se recoge el cálculo de Q<sub>Me</sub> (función (2.6)), que toma el menor valor cuando la clase de entrada es la 2, lo que indica que esta escala de primas con esa clase de entrada posee la mayor equidad y con este criterio ha de ser la elegida.

i	EM <sup>1</sup>	$\frac{EM_{i+1}^1}{EM_i^1}$	EM <sup>2</sup>	$\frac{EM_{i+1}^2}{EM_i^2}$	EM <sup>3</sup>	$\frac{EM_{i+1}^3}{EM_i^3}$	EM <sup>4</sup>	$\frac{EM_{i+1}^4}{EM_i^4}$	EM <sup>5</sup>	$\frac{EM_{i+1}^5}{EM_i^5}$	EM <sup>6</sup>	$\frac{EM_{i+1}^6}{EM_i^6}$
1	0.0776	1.60	0.0735	1.60	0.0657	1.60	0.0577	1.457	0.0578	1.05	0.0568	1.05
2	0.1241	1.60	0.1176	1.60	0.1051	1.60	0.0841	1.60	0.0607	1.0457	0.0597	1.05
3	0.1986	1.457	0.1882	1.457	0.1682	1.457	0.1346	1.60	0.0884	1.60	0.0627	1.457
4	0.2895	1.05	0.2743	1.05	0.2451	1.05	0.2154	1.05	0.1415	1.60	0.0913	1.60
5	0.3040	1.05	0.2880	1.05	0.2574	1.05	0.2261	1.05	0.2265	1.05	0.1462	1.60
6	0.3192	1.05	0.3024	1.05	0.2703	1.05	0.2374	1.05	0.2378	1.05	0.2339	1.05
7	0.3352	1.05	0.3175	1.05	0.2838	1.05	0.2493	1.05	0.2497	1.05	0.2456	1.05
8	0.3519	1.05	0.3334	1.05	0.2980	1.05	0.2618	1.05	0.2622	1.05	0.2579	1.05
9	0.3695	1.05	0.3501	1.05	0.3129	1.05	0.2749	1.05	0.2753	1.05	0.2706	1.05
10	0.3880	$\frac{EM_{10}^1}{EM_1^1}$ =5	0.3676	$\frac{EM_{10}^2}{EM_1^2}$ =5	0.3285	$\frac{EM_{10}^3}{EM_1^3}$ =5	0.2886	$\frac{EM_{10}^4}{EM_1^4}$ =5	0.2891	$\frac{EM_{10}^5}{EM_1^5}$ =5	0.2844	$\frac{EM_{10}^6}{EM_1^6}$ =5
Q <sub>t</sub>	0.0396		0.0387		0.0389		0.0396		0.0402		0.0406	

i	EM <sup>7</sup>	$\frac{EM_{i+1}^7}{EM_i^7}$	EM <sup>8</sup>	$\frac{EM_{i+1}^8}{EM_i^8}$	EM <sup>9</sup>	$\frac{EM_{i+1}^9}{EM_i^9}$	EM <sup>10</sup>	$\frac{EM_{i+1}^{10}}{EM_i^{10}}$	EM <sup>a</sup>	$\frac{EM_{i+1}^a}{EM_i^a}$
1	0.0554	1.05	0.0527	1.05	0.0461	1.05	0.0406	1.05	0.0712	1.60
2	0.0581	1.05	0.0554	1.05	0.0484	1.05	0.0426	1.05	0.1140	1.60
3	0.1060	1.05	0.0581	1.05	0.0508	1.05	0.0447	1.05	0.1824	1.457
4	0.1696	1.475	0.0610	1.05	0.0534	1.05	0.0470	1.05	0.2658	1.05
5	0.1784	1.60	0.0641	1.60	0.0560	1.457	0.0493	1.457	0.2791	1.05
6	0.1873	1.60	0.1026	1.60	0.0817	1.60	0.0719	1.60	0.2931	1.05
7	0.1967	1.05	0.1642	1.457	0.1307	1.60	0.1150	1.60	0.3077	1.05
8	0.2065	1.05	0.2393	1.05	0.2092	1.05	0.1841	1.05	0.3231	1.05
9	0.2168	1.05	0.2512	1.05	0.2197	1.05	0.1933	1.05	0.3393	1.05
10	0.2277	$\frac{EM_{10}^7}{EM_1^7}=5$	0.2638	$\frac{EM_{10}^8}{EM_1^8}=5$	0.2307	$\frac{EM_{10}^9}{EM_1^9}=5$	0.2030	$\frac{EM_{10}^{10}}{EM_1^{10}}=5$	0.3562	$\frac{EM_{10}^a}{EM_1^a}=5$
Q <sub>Mt</sub>	0.0410		0.0417		0.0429		0.0448			

(Tabla 2)

3.2.- Consideremos en segundo lugar las siguientes ponderaciones:  $w_i = (1 + 0.03)^i$ . Ahora la tabla de pesos es la siguiente:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
w <sub>i</sub>	1	0.9709	0.9426	0.9151	0.8885	0.8626	0.8374	0.8131	0.7894	0.7664
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
w <sub>i</sub>	0.7441	0.7224	0.7014	0.6809	0.6611	0.6419	0.6232	0.6050	0.5874	0

y la escala de Bayes para las clases de entrada 4 y 8,

i	EB <sup>4</sup>	$\frac{EB_{i+1}^4}{EB_i^4}$	EB <sup>8</sup>	$\frac{EB_{i+1}^8}{EB_i^8}$
1	0.0828	1.280	0.0765	1.239
2	0.10600	1.058	0.0948	1.052
3	0.1122	1.049	0.0998	1.038
4	0.1177	1.423	0.1036	1.044

5	0.1675	1.136	0.1082	1.031
6	0.1902	1.221	0.1116	1.043
7	0.2322	1.143	0.1164	1.046
8	0.2655	1.170	0.1218	1.604
9	0.3106	1.144	0.1954	1.178
10	0.3552	$\frac{EB_{10}^4}{EB_1^4}=4.288$	0.2301	$\frac{EB_{10}^8}{EB_1^8}=3.004$
Q <sub>Bt</sub>	0.0739		0.0805	

Consideremos el modelo de programación por metas con las siguientes restricciones: equilibrio financiero (2.11), las primas de clases consecutivas se incrementan entre un 5% y un 60% y la prima de la clase 10 es como máximo cinco veces mayor que la de la clase 1.

En las primas con \* se emplea la restricción de equilibrio financiero (2.8).

Las correspondientes escalas de metas para las clases de entrada 4 y 8 son:

i	EM <sup>4</sup>	$\frac{EM_{i+1}^4}{EM_i^4}$	EM <sup>8</sup>	$\frac{EM_{i+1}^8}{EM_i^8}$	EM <sup>4*</sup>	$\frac{EM_{i+1}^{4*}}{EM_i^{4*}}$	EM <sup>8*</sup>	$\frac{EM_{i+1}^{8*}}{EM_i^{8*}}$
1	0.0579	1.60	0.0492	1.05	0.0562	1.60	0.0469	1.05
2	0.0927	1.60	0.0517	1.05	0.0899	1.60	0.0492	1.05
3	0.1485	1.457	0.0543	1.052	0.1439	1.457	0.0517	1.05
4	0.2164	1.05	0.0570	1.60	0.2098	1.05	0.0543	1.457
5	0.2271	1.05	0.0912	1.60	0.2203	1.05	0.0792	1.60
6	0.2385	1.05	0.1459	1.457	0.2313	1.05	0.1267	1.60
7	0.2504	1.05	0.2127	1.05	0.2429	1.05	0.2027	1.05
8	0.2630	1.05	0.2234	1.05	0.2550	1.05	0.2129	1.05
9	0.2761	1.05	0.2345	1.05	0.2678	1.05	0.2235	1.05
10	0.2899	$\frac{EM_{10}^4}{EM_1^4}=5$	0.2463	$\frac{EM_{10}^8}{EM_1^8}=5$	0.2811	$\frac{EM_{10}^{4*}}{EM_1^{4*}}=5$	0.2347	$\frac{EM_{10}^{8*}}{EM_1^{8*}}=5$
Q <sub>Mt</sub>	0.5747		0.6115		0.5815		0.6234	

3.3.- Tomemos finalmente las ponderaciones:  $w_i = (1 + 0.03)^i \cdot p$ . La tabla de pesos es:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
w <sub>i</sub>	1	0.9514	0.8954	0.8419	0.7996	0.7590	0.7118	0.6667	0.6236	0.5824
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
w <sub>i</sub>	0.5283	0.4767	0.4208	0.3540	0.2975	0.2310	0.1744	0.1149	0.0411	0

Los resultados de la escala de Bayes para las clases de entrada 4 y 8 son:

i	EB <sup>4</sup>	$\frac{EB_{i+1}^4}{EB_i^4}$	EB <sup>8</sup>	$\frac{EB_{i+1}^8}{EB_i^8}$
1	0.0828	1.239	0.0753	1.188
2	0.1027	1.059	0.0895	1.055
3	0.1088	1.041	0.0944	1.036
4	0.1133	1.435	0.0978	1.046
5	0.1626	1.120	0.1023	1.038
6	0.1821	1.238	0.1062	1.045
7	0.2254	1.137	0.1110	1.050
8	0.2563	1.183	0.1165	1.582
9	0.3031	1.149	0.1843	1.174
10	0.3482	$\frac{EB_{10}^4}{EB_1^4} = 4.202$	0.2163	$\frac{EB_{10}^8}{EB_1^8} = 2.872$
Q <sub>Bt</sub>	0.0543		0.0582	

Consideremos ahora el modelo de programación por metas con las siguientes restricciones: equilibrio financiero (2.12), las primas de clases consecutivas se incrementan entre un 5% y un 60% y la prima de la clase 10 es como máximo cinco veces mayor que la de la clase 1.

En las primas con \* se emplea la restricción de equilibrio financiero (2.8).

Los resultados de la escala de metas para las clases de entrada 4 y 8 se resumen en siguiente tabla:

i	EM <sup>4</sup>	$\frac{EM_{i+1}^4}{EM_i^4}$	EM <sup>8</sup>	$\frac{EM_{i+1}^8}{EM_i^8}$	EM <sup>4*</sup>	$\frac{EM_{i+1}^{4*}}{EM_i^{4*}}$	EM <sup>8*</sup>	$\frac{EM_{i+1}^{8*}}{EM_i^{8*}}$
1	0.0656	1.05	0.0519	1.05	0.0694	1.05	0.0469	1.05
2	0.0689	1.60	0.0545	1.05	0.0729	1.457	0.0492	1.05
3	0.1103	1.60	0.0572	1.05	0.1062	1.60	0.0517	1.05
4	0.1765	1.457	0.0600	1.05	0.1700	1.60	0.0543	1.457

5	0.2572	1.05	00630	1.421	0.2720	1.05	00792	1.60
6	0.2701	1.05	0.0896	1.60	0.2856	1.05	0.1267	1.60
7	0.2836	1.05	0.1435	1.60	0.2999	1.05	0.2027	1.05
8	0.2978	1.05	0.2296	1.076	0.3149	1.05	0.2129	1.05
9	0.3127	1.05	0.2471	1.05	0.3306	1.05	0.2235	1.05
10	0.3283	$\frac{EM_{10}^4}{EM_1^4}$ =5	0.2594	$\frac{EM_{10}^8}{EM_1^8}$ =5	0.3471	$\frac{EM_{10}^4}{EM_1^4}$ =5	0.2347	$\frac{EM_{10}^8}{EM_1^8}$ =5
Q <sub>Mt</sub>	0.4234		0.4441		0.4244		0.6234	

3.4.- La metodología presentada permite mejorar alguna medida de eficiencia a la hora de diseñar un SBM. Analizaremos finalmente la mejora de la elasticidad en el ejemplo 3.1.

Consideremos la escala de Bayes transitoria cuando hemos elegido como clase de entrada la 4, EB<sup>4</sup>. Notemos que las primas sucesivas de EB<sup>4</sup> se incrementan entre un 4,5% y un 42,6%, que la relación entre la prima de la clase 1 y la de la clase 10 es 4,23, cumple la restricción de equilibrio financiero (2.5) y que la elasticidad en 0.1010 es 0.1331.

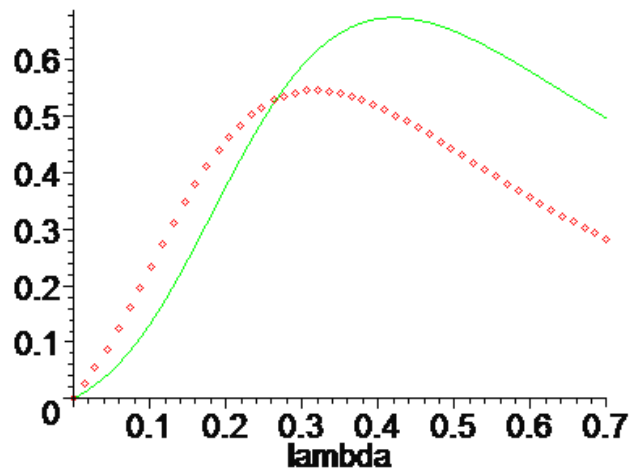
Es posible encontrar una escala de metas que cumpla las condiciones anteriormente indicadas de EB<sup>4</sup> y mejore la elasticidad en el punto indicado. Basta para ello resolver el sistema lineal (2.7) con las restricciones añadidas

$$\left. \begin{aligned} b_{i+1} &\leq 1.426 b_i \\ b_{i+1} &\geq 1.04 b_i \\ b_1 \cdot \bar{\Pi}_1^m + \dots + b_{10} \cdot \bar{\Pi}_{10}^m &= E(\lambda) \\ b_{10} &\leq 4.23 b_1 \\ \frac{dP(0.1010)}{d\lambda} - 0.1331 \frac{P(0.1010)}{0.1010} &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

El resultado es la escala EM<sup>\*4</sup>:

i	$EB^4$	$\frac{EB_{i+1}^4}{EB_i^4}$	$EM^{*4}$	$\frac{EM_{i+1}^{*4}}{EM_i^{*4}}$
1	0.0828	1.259	0.0641	1.426
2	0.1043	1.060	0.09149	1.426
3	0.1106	1.045	0.1304	1.426
4	0.1156	1.426	0.1860	1.170
5	0.1649	1.127	0.2177	1.045
6	0.1858	1.227	0.2275	1.045
7	0.2280	1.139	0.2378	1.045
8	0.2598	1.176	0.2485	1.045
9	0.3056	1.147	0.2597	1.045
10	0.3506	$\frac{EB_{i+1}^4}{EB_i^4}=4.23$	0.2714	$\frac{EM_{i+1}^{*4}}{EM_i^{*4}}=4.23$
Q	$Q_{Bt}=0.00511$ $Q_{Mt}=0.04580$		$Q_{M^*}=0.04142$	
	$\eta(0.1010)=0.1331$		$\eta(0.1010)=0.2326$	

Notemos que el resultado obtenido no sólo mejora la elasticidad para  $\lambda = 0.1010$  sino para los  $\lambda$  inferiores a 0.264 lo que representa al 96% de las pólizas (véase la figura siguiente). La línea de puntos representa la elasticidad de la escala de Metas y línea continua la elasticidad de la escala de Bayes.



Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia e Innovación la financiación de este trabajo (proyecto EC02010-22065-C03-01)

#### **4. Bibliografía.**

- Baione, Levantesi y Menziatti (2002).- “The development of a optimal bonus-malus system in a competitive market”.- ASTIN Bulletin vol 32 nº 1. 159-170.
- Borgan, O.; Hoem, J.M. y Norberg, R. (1981). A Nonasymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus Systems. Scandinavian Actuarial Journal 165-178.
- Denuit, Maréchal, Pitrebois y Walhin (2007).- Actuarial Modelling of Claim Counts. John Wiley & Sons, Ltd.
- García Pineda, P. (2002). Diseño de Sistemas de Tarificación Bonus-Malus mediante la metodología de Programación por Metas. Tesis Doctoral pendiente de publicación, Universidad Complutense de Madrid.
- Gil, G<sup>a</sup> Pineda, Heras y Vilar.- “Criterios asintóticos para el cálculo de primas en sistemas bonus-malus”. Anales del Instituto de Actuarios Españoles 2003.
- Gilde, V. y Sundt, B. (1989). On Bonus Systems with Credibility Scales. Scandinavian Actuarial Journal 11-32.
- Heras, A.; Vilar, J.L. y Gil, J.A (2002). Asymptotic Fairness of Bonus-Malus Systems and Optimal Scales of Premiums. The Geneva Papers of Risk and Insurance Theory 27, 61-82.
- Heras, A.; Gil, J.A, Garcia-Pineda, P. y Vilar, J.L. (2004). An Application of Linear Programming to Bonus Malus System Design. ASTIN Bulletin vol. 34 (2) 435-456.
- Kemeny, J.G. y Snell, J.L. (1976). Finite Markov Chains. Springer-Verlag.
- Klugman, S.A.; Panjer, H.H. y Willmot, G.E. (1998). Loss Models. From Data to Decisions}. Wiley series in Probability and Statistics.
- Lemaire, J. (1985). Automobile Insurance. Actuarial Models. Kluwer-Nijhoff Publishing.
- Lemaire, J. (1995). Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance. Kluwer Academic Publishers.
- Lemaire, J. (2004). Bonus-Malus Systems. Encyclopedia of Actuarial Science. Wiley.
- Loimaranta, K. (1972). Some Asymptotic Properties of Bonus Systems. ASTIN Bulletin 6, 233-245.
- Norberg, R. (1976). A Credibility Theory for Automobile Bonus Systems. Scandinavian Actuarial Journal, 92-107.
- Pesonen, M. (1963). A Numerical Method of Finding a Suitable Bonus Scale. ASTIN Bulletin 2, 102-108.
- Vilar, J.L. (2000). Arithmetization of Distributions and Linear Goal Programming. Insurance: Mathematics and Economics 27, 113-122.
- Verico, P. (2002). Bonus-Malus Systems: "Lack of Transparency" and Adequacy Measure. ASTIN Bulletin 32 (2), 315-318.