

**PROVISIONES TÉCNICAS POR AÑOS DE CALENDARIO
MEDIANTE EL MODELO LINEAL GENERALIZADO.
UNA APLICACIÓN CON REXCEL.[†]**

Eva Boj del Val¹, Teresa Costa Cor² y Juan Espejo Fernández³

ABSTRACT

The Generalized Linear Model (GLM) is a stochastic model with application to the claim reserving problem. The GLM has as a particular case the deterministic Chain- Ladder (CL) method, and allows calculating prediction errors. These errors help us to incorporate solvency margins with a statistical sense, which is an important objective in Solvency II. In this work we study the formulas for the calendar year reserves, from which we can make calculations in a financial environment. Accompanying the study we include a RExcel application which calculates actual values for different scenarios, using analytical formulas or predictive distributions.

KEY WORDS: Claim reserving; Calendar year; Solvency II; Generalized linear model; Chain-Ladder; RExcel.

RESUMEN

El Modelo Lineal Generalizado (MLG) es un modelo estocástico con aplicación al cálculo de provisiones técnicas. El MLG tiene como caso particular el método determinista Chain-Ladder (CL), y permite calcular los errores cometidos en la predicción. Dichos errores posibilitan el cálculo de márgenes de solvencia con sentido estadístico, objetivo primordial en Solvencia II. En este artículo se estudian las fórmulas de las reservas por

[†] Trabajo financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, proyecto número MTM2010-17323, y por la Generalitat de Catalunya, AGAUR, proyecto número 2014SGR152.

¹ Autora de correspondencia. Profesora Titular de Universidad. Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Facultad de Economía y Empresa. Universidad de Barcelona. Avenida Diagonal 690, 08034_Barcelona. España. E-mail: evaboj@ub.edu

² Profesora Titular de Escuela Universitaria. Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Facultad de Economía y Empresa. Universidad de Barcelona. Avenida Diagonal 690, 08034_Barcelona. España. E-mail: tcosta@ub.edu

³ Ingeniero Técnico de Obras Públicas y Máster Universitario en Ingeniería Civil en la Universidad Politécnica de Cataluña. Máster en Ciencias Actariales y Financieras en la Universidad de Barcelona, promoción 2013-14. E-mail: juan.espejo.fdez@gmail.com

Este artículo ha sido recibido en versión revisada el 30 de octubre de 2014.

años de calendario, las cuales permiten cálculos en un entorno financiero. Acompañando el estudio se incluye una aplicación de RExcel que calcula valores actuales para diferentes escenarios, con fórmulas analíticas o distribuciones predictivas.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los primeros métodos deterministas de cálculo de provisiones propuesto en la bibliografía actuarial fue el método Chain- Ladder (CL) (van Eeghen, 1981). De él surgieron diferentes variantes deterministas mediante, por ejemplo, la inclusión de ponderaciones. En las últimas décadas, se han propuesto métodos estocásticos con el objetivo de tener una medición sobre el error de predicción cometido en la estimación de las reservas (véase, por ejemplo, Albarrán y Alonso, 2010; Verrall, 2000; y, Verrall y England, 2000). Uno de ellos es el denominado modelo de Mack (Mack, 1993), que tiene como caso particular al método CL (Mack y Venter, 2000), ya que la estimación de las reservas coincide en ambos métodos. En este sentido, el modelo de Mack puede etiquetarse como una generalización estocástica del método CL. Del mismo modo, otros modelos estocásticos generalizan el método clásico CL, pues proporcionan la misma estimación de las reservas, pero además añaden las correspondientes formulaciones sobre errores de predicción y otras medidas que amplían la información que no se obtiene con los métodos deterministas.

Al igual que ocurre con el modelo de Mack, el Modelo Lineal Generalizado (MLG) generaliza el método CL desde un punto de vista estocástico. El MLG se ha propuesto en la bibliografía actuarial para la solución de diferentes problemas (véase, por ejemplo, Haberman y Renshaw, 1996; Boj *et al.*, 2004; y, Costa *et al.*, 2012), incluido el problema de cálculo de provisiones técnicas de prestaciones pendientes. Nos referimos a las siguientes referencias donde podemos encontrar el detalle de la modelización y de las formulaciones del MLG para este problema: Boj y Costa (2014), England y Verrall (1999, 2002, 2006) y England (2002).

El MLG (ver Boj *et al.*, 2004; y, McCullagh y Nelder, 1989, entre otras referencias) permite elegir la distribución del error y la función de enlace del modelo. En caso de suponer una distribución Poisson-sobredispersa⁴ junto

⁴ La distribución Poisson-sobredispersa asume, al igual que la distribución de Poisson, una función de varianza igual a la media, $V(\mu) = \mu$, pero a diferencia, asume un parámetro de dispersión ϕ diferente de la unidad. Concretamente para el supuesto de sobredispersión el parámetro se supone mayor a uno, $\phi > 1$ (ver McCullagh y Nelder, 1989 para el detalle).

con la función de enlace logarítmica, posibilita la obtención del caso particular CL clásico, es decir, la estimación obtenida con MLG coincide con la del método determinista. Los errores de predicción pueden ser calculados a partir de formulaciones analíticas y también haciendo uso de metodología de remuestreo *bootstrap*. Dichos errores nos permiten conocer algo más sobre la incertidumbre de los pagos futuros que se deberán afrontar en los próximos periodos y, por lo tanto, posibilita añadir a las reservas márgenes de solvencia con sentido estadístico. Una opción es provisionar utilizando la estimación de los pagos futuros más un porcentaje del error de predicción. O bien, otra opción, si disponemos de la distribución predictiva de las reservas como en el caso de utilizar *bootstrap*, es sustituir su estimación por el valor en riesgo (VaR) a un nivel de confianza fijado y (recomendablemente) superior al 50%. La distribución predictiva de las estimaciones para el método CL se podría obtener con *bootstrap* directamente, como se propone, por ejemplo, en Alvarez-Jareño y Coll-Serrano (2012), o haciendo uso del MLG y suponiendo una distribución de Poisson-sobredispersa, como se describe en este artículo. Los márgenes de solvencia, calculados a partir del error de predicción o calculados a partir del VaR, posibilitan al actuario un mayor control sobre el capital mínimo y en solvencia obligatorios de la Entidad Aseguradora.

Los tipos de reserva que se pueden estimar a partir de un triángulo de desarrollo son: reservas por años de origen, reservas por años de calendario y reserva total. Si revisamos las referencias bibliográficas referentes a MLG en aplicación al cálculo de provisiones, por ejemplo las más básicas England y Verrall (1999, 2002, 2006) y England (2002), observamos que las formulaciones de las reservas y de los errores de predicción están explicitadas para reservas por años de origen y para reserva total. En el mismo sentido, si profundizamos en los programas informáticos, como el paquete ChainLadder (Gesmann *et al.*, 2013) de R (R Development Core Team, 2014), o libros donde se propone código de R como Kaas *et al.* (2008), observamos que también se centran en salidas y códigos programados referentes a reservas y errores de predicción (y si es el caso distribuciones predictivas) sobre reservas individuales (es decir, importes de todos los pagos futuros estimados), reservas por años de origen y total.

Sin embargo, para poder tratar los pagos futuros en un ambiente financiero, en general conservador y libre de riesgo dentro del contexto de Solvencia II, es conveniente trabajar con provisiones por años de calendario, es decir, con la suma de los pagos futuros de las anti-diagonales estimadas del triángulo de desarrollo. Con estos importes podremos calcular el valor actual de los pagos a realizar en cada uno de los próximos periodos. Este es el objetivo

básico del artículo, la deducción matemática y estadística de las formulaciones relativas al cálculo de reservas y de errores de predicción por años de calendario para el MLG, tanto con formulación analítica como con distribución predictiva, y su programación para el usuario incluyendo el cálculo de valores actuales que permitan incluir márgenes de solvencia elegidos por el usuario teniendo en cuenta los errores de predicción o el VaR. El programa elegido ha sido R mediante el complemento RExcel (Baier y Neuwirth, 2007), que permite la ejecución de instrucciones de R mediante código Visual Basic for Applications (VBA). RExcel ejecuta instrucciones de R a través de Excel sin tener abierto R y guarda los resultados directamente en la hoja de cálculo desde donde se esté ejecutando la aplicación. Los datos, en este caso el triángulo de desarrollo, se introducen en celdas de Excel, que RExcel reconoce como datos y con los que R opera. Finalmente, el resultado se guarda directamente en la hoja de cálculo. En Espejo *et al.* (2014) el lector puede descargar una aplicación programada para este artículo que consiste en un fichero ejecutable, *claimreserving.xlsm*, de RExcel que realiza el cálculo de reservas y de valores actuales con MLG para reservas por años de origen, por años de calendario y total. Permite diferentes escenarios y tiene en cuenta el contexto de Solvencia II, pues contempla varias formas de incorporar márgenes de solvencia y permite elegir el tipo de interés. En esta aplicación diseñada no se ha utilizado ninguna de las funciones disponibles en el paquete ChainLadder sino que se ha generado directamente el código de R para poder controlar mejor todo el proceso y las variables implicadas. El detalle de los casos programados se encuentra en el apartado 4 de este artículo, donde a modo de ejemplo numérico se ilustran todos los casos con los datos del conocido triángulo de desarrollo de Schmidt y Zocher (2008).

El artículo se estructura del siguiente modo: en el apartado 2 se contextualiza el problema del cálculo de provisiones técnicas teniendo en cuenta el actual contexto de Solvencia II; en el apartado 3 se explica la aplicación del MLG al problema de cálculo de reservas. Dentro del sub-apartado 3.1. se explicitan las expresiones en caso de utilizar fórmula analítica para el cálculo de la desviación estándar de la distribución de las reservas y, en el sub-apartado 3.2., en caso de utilizar estimación *bootstrap*. En el apartado 4 se realiza un ejemplo con datos clásicos. En el sub-apartado 4.1 se explican las características de la aplicación de RExcel desarrollada para los cálculos y, en el sub-apartado 4.2, se muestran los resultados numéricos. Finalmente, en el apartado 5 se exponen las principales conclusiones y aportaciones del estudio.

2. CONTEXTUALIZACIÓN: SOLVENCIA II Y EL CÁLCULO DE PROVISIONES TÉCNICAS

El marco de Solvencia II. Es de relevancia centrar el estudio dentro del contexto actual de Solvencia II, al que las Entidades Aseguradoras deben adaptarse paulatinamente antes de 2016 (véase, entre otras referencias, Alonso, 2007; Moreno, 2013; Price Waterhouse Coopers, 2007; y, UNESPA, 2007). Las principales legislaciones en vigor que hacen referencia al cálculo de provisiones técnicas son, por un lado, el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, ROSSP (Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, 1998); y, por otro, la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad del seguro y de reaseguro y su ejercicio (El Parlamento Europeo y el Consejo de la Unión Europea, 2009). De esta última, más conocida como Solvencia II, se extrae la idea de la necesidad de utilizar un ambiente financiero con tipos de interés libres de riesgo para asegurar la solvencia. También es de importancia el correcto cálculo de márgenes de solvencia dentro del contexto actual de riesgo. Los requerimientos de capital mínimo (Minimum Capital Requirement) y de solvencia (Solvency Capital Requirement) son aspectos fundamentales para las Entidades Aseguradoras dentro de este nuevo contexto normativo.

Modelos estadísticos. El método Chain-Ladder y sus generalizaciones.

Algunos de los métodos deterministas de cálculo de provisiones son (van Eeghen, 1981; Albarrán y Alonso, 2010): Grossing-up, Link ratio, CL, variantes de CL, mínimos cuadrados de de Vyllder, separación aritmética y geométrica de Taylor. Como se ha explicado en la introducción, *a posteriori*, se han propuesto métodos de carácter estocástico, algunos probabilísticos y otros bayesianos. Por citar algunos, tenemos: el modelo de Mack, el MLG, el método de Bornhuetter-Ferguson y el método Munich Chain-Ladder. Todos ellos tienen la característica común de generalizar, desde el punto de vista estocástico, el método CL clásico, pues éste surge como caso particular al coincidir la estimación de las reservas.

Vamos a centrarnos ahora en el MLG, objeto de estudio en este artículo. En el MLG podemos elegir la distribución del error, la función de enlace y, por supuesto, el predictor lineal (Boj y Costa, 2014). En función de las hipótesis que imponamos obtendremos algunos de los métodos deterministas como casos particulares. Por ejemplo, podemos obtener el método CL, el de mínimos cuadrados de de Vyllder y los de separación aritmética y geométrica de Taylor. Nos referimos a Kaas *et al.* (2008) para el detalle de las hipótesis

de cada uno de ellos. Concretamente, las hipótesis del caso particular CL las describimos en el apartado 3 del artículo, las cuáles son básicamente distribución Poisson-sobredispersa y función de enlace logarítmica. Por otro lado, puesto que estaremos analizando cuantías podríamos estar interesados en suponer otras distribuciones como son la Gamma o la Inversa Gaussiana, combinadas con la función de enlace logarítmica o cualquier otra. Es sabido que el ajuste del modelo suele reflejarse en la desviación explicada (Boj *et al.*, 2004). Aunque en el contexto que nos ocupa nos fijaremos también en el porcentaje de error cometido en la predicción tal y como explicaremos en la aplicación, ya que esta medida permite comparar MLG con diferentes características y también éstos con otros métodos.

Tipos de reserva. Los datos de que disponemos para el cálculo de provisiones técnicas están resumidos en el denominado *triángulo de desarrollo*. Consideremos una cartera de riesgos y consideremos la familia de variables aleatorias $\{c_{ij}\}_{i,j \in \{0,1,\dots,k\}}$ donde c_{ij} son las cuantías pagadas en el año de ocurrencia i y pagadas al cabo de j años, por lo tanto, son cuantías correspondientes al año de desarrollo j situadas en el año de calendario $i + j$. Nos referimos con c_{ij} a las cuantías de siniestros ocurridos en el año de origen i y pagadas en el año de desarrollo j . Supongamos que las cuantías c_{ij} han sido observadas para los años de calendario $i + j \leq k$, con lo que podemos construir el triángulo de desarrollo con datos observados como en la figura 1. Las filas, i , indican el año de ocurrencia y las columnas, j , el año de desarrollo. Los elementos de las anti-diagonales que cumplen $i + j = t$ se corresponden con las cuantías del año de calendario t . En el caso en que $i + j \geq k + 1$, las cuantías no son conocidas, y el problema consiste en la predicción del resto del rectángulo. Los datos a predecir se corresponden con los pagos futuros, que sumados por anti-diagonales, constituirán las reservas por años de calendarios que en este artículo vamos a estudiar. Las reservas por años de origen, $i = 1, \dots, k$, se obtienen sumando las cuantías de las filas correspondientes:

$$R_i = \sum_{j=k-i+1}^k \hat{c}_{ij} . \quad (1)$$

Las reservas por años de calendario, $t = k + 1, \dots, 2k$, se obtienen sumando las cuantías de los años de calendario futuros, es decir, las cuantías situadas en la misma anti-diagonal para los datos estimados:

$$R_t = \sum_{j=t-k}^k \hat{c}_{t-j,j} \cdot (2)$$

La reserva total se corresponde con la suma de todas las cuantías estimadas:

$$R = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k-i+1}^k \hat{c}_{ij} \cdot (3)$$

Año de ocurrencia	Año de desarrollo								
	0	1	...	j	...	$k-i$...	$k-1$	k
0	c_{00}	c_{01}	...	c_{0j}	...	c_{0k-i}	...	c_{0k-1}	c_{0k}
1	c_{10}	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1k-i}	...	c_{1k-1}	
...		
i	c_{i0}	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{ik-i}			
...				
$k-j$	c_{k-j0}	c_{k-j1}	...	c_{k-jj}					
...						
$k-1$	c_{k-10}	c_{k-11}							
k	c_{k0}								

Figura 1. Triángulo de desarrollo con cuantías no acumuladas.

3. MODELO LINEAL GENERALIZADO. CASO PARTICULAR CHAIN-LADDER ESTOCÁSTICO.

Si utilizamos el MLG (Boj *et al.*, 2004; McCullagh y Nelder, 1989) para modelar los datos del triángulo de desarrollo en el cálculo de provisiones técnicas, e imponemos el caso en que la distribución del error es Poisson-sobredispersa (4) junto con la función de enlace canónica logarítmica (5), obtenemos como caso particular el modelo CL clásico, es decir, la estimación de las reservas coincide en ambos modelos (Boj y Costa, 2014; England y Verrall, 1999, 2002, 2006; y, England, 2002).

El modelo Poisson-sobredisperso aplicado a las cuantías no acumuladas⁵ del triángulo supone los siguientes valores para la distribución:

$$\mu_{ij} = E[c_{ij}] \quad V(\mu_{ij}) = \mu_{ij} \quad \phi > 1 \quad w_{ij} = 1. \quad (4)$$

Con lo que:

$$\mu_{ij} = E[c_{ij}] \quad Var[c_{ij}] = \phi \mu_{ij}.$$

Y combinado con la función de enlace logarítmica:

$$\log \mu_{ij} = \eta_{ij}. \quad (5)$$

El predictor lineal es de la forma $\eta_{ij} = c_0 + \alpha_i + \beta_j$, siendo α_i el factor correspondiente a los años de ocurrencia $i=1, \dots, k$, β_j el factor correspondiente a los años de desarrollo $j=1, \dots, k$, y c_0 el término que se correspondería al año de ocurrencia y desarrollo 0. Cabe notar que en la construcción de las estimaciones el término c_0 siempre debe ser añadido en la predicción, junto con el coeficiente correspondiente al año de ocurrencia y el correspondiente al año de origen. A partir de aquí podemos realizar las estimaciones de las cuantías del resto del rectángulo mediante la expresión:

$$\hat{c}_{ij} = \exp(c_0 + \alpha_i + \beta_j), \quad (6)$$

y con las estimaciones dadas por (6), calcular las reservas por años de origen, de calendario y total (1), (2) y (3) respectivamente.

3.1. ERROR CUADRÁTICO MEDIO CON FÓRMULA ANALÍTICA

Podemos calcular el error cometido en la predicción de las reservas por dos vías. En primer lugar, utilizando la fórmula analítica del MLG. En este caso se tiene en cuenta la distribución supuesta en los datos mediante las expresiones que en este apartado detallaremos. O bien, haciendo uso de metodología *bootstrap*, como explicaremos en el siguiente sub-apartado 3.2.

Nos referimos a England y Verrall (1999, 2002 y 2006) para un mayor detalle sobre las expresiones del error de predicción en relación a las reservas por años de origen y total. Las referentes a reservas por años de calendario son una aportación de los autores para este artículo.

⁵ El MLG trabaja con las cuantías no acumuladas a diferencia de CL que estima con datos acumulados, aunque al final acaban siendo desacumulados.

Por otro lado, en el capítulo 10 de Kaas *et al.* (2008) encontramos con detalle el código en R para el cálculo del error de predicción tanto con fórmula analítica como *bootstrap* y, también, del análisis estadístico de la distribución predictiva de las reservas obtenida mediante *bootstrap*, aunque únicamente para reservas por años de origen y total. En Espejo *et al.* (2014) nosotros hemos utilizado dicho código en R para los cálculos relacionados con reservas por años de origen y total, y adicionalmente, como aportación a este estudio, hemos elaborado el código de R que permite el mismo tratamiento para reservas por años de calendario. Hacemos notar que en nuestra aplicación informática no utilizamos outputs obtenidos a partir del paquete ChainLadder de R ni reproducimos su código.

Nuestro objetivo es calcular el error de predicción, el cuál se corresponde con la raíz cuadrada del error cuadrático medio (mean square error, MSE, en inglés) de predicción. Definido como:

$$MSE(\hat{c}_{ij}) = E[(c_{ij} - \hat{c}_{ij})^2] = (E[c_{ij}] - E[\hat{c}_{ij}])^2 + Var[c_{ij} - \hat{c}_{ij}].$$

Haciendo la aproximación $E[c_{ij}] \approx E[\hat{c}_{ij}]$, y teniendo en cuenta que las cuantías pasadas y predichas son variables aleatorias independientes, y por lo tanto la varianza de su diferencia es exactamente la suma de sus varianzas, podemos aproximarlo como:

$$MSE(\hat{c}_{ij}) \approx Var[c_{ij}] + Var[\hat{c}_{ij}]. \quad (7)$$

Observamos que el *error cuadrático medio*, (7), es la suma de dos componentes: la primera se refiere a la *variabilidad de los datos* (varianza del proceso) y la segunda a la *variabilidad de la estimación* (varianza de la estimación). La primera la estimaremos con la fórmula de la varianza de la distribución y la segunda utilizando la aproximación:

$$Var[\hat{c}_{ij}] \cong \left| \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \eta_{ij}} \right|^2 Var[\eta_{ij}],$$

de lo que se obtiene:

- Error cuadrático medio para cada estimación de las cuantías:

$$MSE(\hat{c}_{ij}) \cong \phi \hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}_{ij}^2 Var[\hat{\eta}_{ij}]. \quad (8)$$

- Error cuadrático medio para las reservas por años de origen:

$$\begin{aligned}
 E\left[\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2\right] &= MSE\left(\hat{R}_i\right) \approx \sum_{\substack{j=1,\dots,k \\ i+j>k}} \hat{\phi}_{ij} \hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}_i' Var\left[\hat{\eta}_i\right] \hat{\mu}_i = \\
 &= \sum_{\substack{j=1,\dots,k \\ i+j>k}} \hat{\phi}_{ij} \hat{\mu}_{ij} + \sum_{\substack{j=1,\dots,k \\ i+j>k}} \hat{\mu}_{ij}^2 Var\left[\hat{\eta}_{ij}\right] + 2 \sum_{\substack{j_1, j_2=1,\dots,k \\ j_2 > j_1 \\ i+j_1 > k, i+j_2 > k}} \hat{\mu}_{ij_1} \hat{\mu}_{ij_2} Cov\left[\hat{\eta}_{ij_1}, \hat{\eta}_{ij_2}\right]. \quad (9) \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, k
 \end{aligned}$$

- Error cuadrático medio para las reservas por años de calendario:

$$\begin{aligned}
 E\left[\left(R_t - \hat{R}_t\right)^2\right] &= MSE\left[\hat{R}_t\right] \approx \sum_{\substack{i, j=1,\dots,k \\ i+j=t}} \hat{\phi}_{ij} \hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}_t' Var\left[\hat{\eta}_t\right] \hat{\mu}_t = \\
 &= \sum_{\substack{i, j=1,\dots,k \\ i+j=t}} \hat{\phi}_{ij} \hat{\mu}_{ij} + \sum_{\substack{i, j=1,\dots,k \\ i+j=t}} \hat{\mu}_{ij}^2 Var\left[\hat{\eta}_{ij}\right] + 2 \sum_{\substack{i_1, j_1, j_2=1,\dots,k \\ i_1 j_1 \neq i_2 j_2 \\ i_1 + j_1 = t, i_2 + j_2 = t}} \hat{\mu}_{i_1 j_1} \hat{\mu}_{i_2 j_2} Cov\left[\hat{\eta}_{i_1 j_1}, \hat{\eta}_{i_2 j_2}\right]. \quad (10) \\
 & \quad t = k + 1, k + 2, \dots, 2k
 \end{aligned}$$

- Error cuadrático medio para la estimación de la reserva total:

$$\begin{aligned}
 E\left[\left(R - \hat{R}\right)^2\right] &= MSE\left[\hat{R}\right] \approx \sum \hat{\phi}_{ij} \hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}' Var\left[\hat{\eta}\right] \hat{\mu} = \\
 &= \sum_{\substack{i, j=1, 2, \dots, k \\ i+j>k}} \hat{\phi}_{ij} \hat{\mu}_{ij} + \sum_{\substack{i, j=1, 2, \dots, k \\ i+j>k}} \hat{\mu}_{ij}^2 \left[\hat{\eta}_{ij}\right] + 2 \sum_{\substack{i_1, j_1, i_2, j_2=1, 2, \dots, k \\ i_1 + j_1 > k, i_2 + j_2 > k \\ i_1 j_1 \neq i_2 j_2}} \hat{\mu}_{i_1 j_1} \hat{\mu}_{i_2 j_2} Cov\left[\hat{\eta}_{i_1 j_1}, \hat{\eta}_{i_2 j_2}\right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Las formulaciones de las expresiones (8), (9) y (11) se encuentran ampliamente desarrolladas en England y Verrall (1999, 2002) y a partir de ellas nosotros hemos deducido la expresión (10) aplicable a reservas por años de calendario.

3.2. ERROR CUADRÁTICO MEDIO MEDIANTE ESTIMACIÓN BOOTSTRAP

La estimación de los errores de predicción, es decir, la raíz cuadrada de los MSE (8), (9), (10) y (11), la podemos realizar alternativamente haciendo uso de *bootstrap*. Con esta metodología estimamos la distribución predictiva de las reservas individuales, por años de origen, por años de calendario y total. De estas distribuciones podemos calcular estadísticos como la media, la desviación estándar, cuantiles, como puede ser el VaR (VaR_α)⁶, asimetría,

⁶ VaR para un determinado nivel de confianza α : $VaR_\alpha(X) = \inf\{x: P[X \leq x] \geq \alpha\}$.

curtosis, realizar histogramas, etc.

La idea o procedimiento general de la metodología *bootstrap* (en este texto como caso particular del denominado *bootstrapping residuals*) es la siguiente:

- Se aplica el modelo CL clásico al triángulo de datos originales con cuantías acumuladas, se desacumulan y se calculan los residuos de Pearson, $r_{ij}^p = \frac{c_{ij} - \hat{c}_{ij}}{\sqrt{\hat{c}_{ij}}}$.
- Dichos residuos se remuestran B veces y con ellos se construyen B nuevas muestras de triángulos de cuantías no acumuladas. De la fórmula de los residuos se despeja: $c_{ij}^* = r_{ij}^{p*} (\hat{c}_{ij})^{1/2} + \hat{c}_{ij}$.
- Se estima el MLG Poisson-sobredisperso a cada una de las B muestras y con él las reservas individuales, por años de origen, por años de calendario y total.
- El resultado es que disponemos de B valores de las reservas por años de origen, de calendario y total, lo que nos proporciona la distribución predictiva de dichas reservas.

Así, el error de predicción (prediction error, PE, en inglés) estimado mediante metodología *bootstrap* se corresponde con la raíz cuadrada de la suma de la varianza de las reservas según la distribución supuesta (en este caso Poisson) más la varianza estimada del error mediante *bootstrap*. De forma que los errores de predicción para cada predicción, para las reservas por años de origen, por años de calendario y total se estiman respectivamente como:

$$PE_{boot}(c_{ij}) \cong \sqrt{\hat{\phi}^p \hat{c}_{ij} + \frac{n}{n-p} (SE_{boot}(c_{ij}))^2}, \quad (12)$$

$$PE_{boot}(R_i) \cong \sqrt{\hat{\phi}^p \hat{R}_i + \frac{n}{n-p} (SE_{boot}(R_i))^2}, \quad i=1, \dots, k, \quad (13)$$

$$PE_{boot}(R_t) \cong \sqrt{\hat{\phi}^p \hat{R}_t + \frac{n}{n-p} (SE_{boot}(R_t))^2}, \quad t=k+1, k+2, \dots, 2k, \quad (14)$$

$$PE_{boot}(R) \cong \sqrt{\hat{\phi}^p \hat{R} + \frac{n}{n-p} (SE_{boot}(R))^2}, \quad (15)$$

donde el parámetro de dispersión $\hat{\phi}^p$ en las expresiones (12), (13), (14) y (15), se puede estimar con el estimador de momentos basado en los residuos generalizados de Pearson y SE_{boot} significa error estándar (standard error, SE, en inglés) de la distribución *bootstrap* considerada (reservas individuales, por años de origen, por años de calendario o total). Observamos que para la estimación del error estándar se utiliza una estimación corregida por sesgo, siendo $n-p$ el número de grados de libertad, con $p=2k+1$ el número de parámetros del modelo (para una justificación, ver páginas 286 y 287 de England y Verrall, 1999).

A partir de las expresiones (12), (13) y (15) descritas en England y Verrall (1999, 2002) nosotros hemos deducido la expresión (14) referente al error de predicción en el caso de reservas por años de calendario.

Una vez detalladas las formulaciones para el caso *bootstrap* queríamos remarcar para el lector, a modo de resumen y para clarificar conceptos, las siguientes ideas: primeramente hemos observado que el error cuadrático medio (7) puede ser aproximado como la suma de la variabilidad de los datos y la variabilidad de la estimación. A continuación hemos visto que en las fórmulas relativas a errores de predicción, las fórmulas (12), (13), (14) y (15), la distribución predictiva estimada mediante *bootstrap* interviene únicamente en la componente debida a la variabilidad de la estimación. Concretamente interviene mediante el error estándar de la distribución, con una posterior modificación por sesgo. De este modo, aunque la distribución predictiva nos da información estadística sobre las estimaciones, con la desviación típica de las B muestras no es suficiente si nuestro objetivo es el cálculo del error de predicción del modelo.

4. CASOS PRÁCTICO CON REXCEL

En este apartado aplicamos el MLG al problema de cálculo de provisiones técnicas con los datos del triángulo de desarrollo extraído del artículo de Schmidt y Zocher (2008). En el primer sub-apartado describimos los casos que la aplicación desarrollada con RExcel (Espejo *et al.*, 2014) contempla y explicamos al usuario los botones programados y las pantallas que van apareciendo en la ejecución del aplicativo. En el segundo apartado ilustramos numéricamente los diferentes casos con los datos citados.

4.1. DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN CON REXCEL

Tal y como indican sus autores, Baier y Neuwirth (2003), las principales características del complemento RExcel de R son:

- Transferencia de datos entre R y Excel en ambas direcciones.
- Ejecución de código R directamente desde rangos de Excel.
- Programación de macros en código VBA que llaman a R para realizar cálculos sin exponer R al usuario.
- Llamada a funciones de R directamente desde las celdas de Excel, utilizando el modo de actualización automática de Excel para activar el nuevo cálculo de R.
- Uso de Excel como interfaz gráfica de usuario de R, por lo que la funcionalidad de R resulta accesible a través de los menús y cuadros de diálogo, en lugar de un estilo de programación orientada a la línea de comandos.

Todo ello conlleva que RExcel pueda resultar atractivo para su utilización a nivel profesional dentro del sector asegurador; especialmente, por permitir trabajar con las múltiples posibilidades que ofrece R a través de sus paquetes, utilizando la interfaz gráfica de usuario del propio Excel, la cual facilita mucho la introducción de datos.

RExcel funciona en Microsoft Windows (XP, Vista y 7) y únicamente con las versiones de 32 bits de Excel 2003, 2007, 2010 y 2013; no obstante, es posible instalarlo en las versiones de Windows de 64 bits. Comentar también que la versión utilizada en este artículo, RExcel 3.2.14, requiere una versión de 32 bits, igual o posterior, a R 2.15.0. Para mayor detalle de los requisitos informáticos y/o descarga de versiones, nos referimos a los enlaces:

RExcel y sus requisitos de instalación: <http://rcom.univie.ac.at>

Paquete estadístico R: <http://www.r-project.org>

El archivo elaborado para este artículo, *claimreserving.xlsm*, puede ser descargado del depósito digital de la Universidad de Barcelona: <http://hdl.handle.net/2445/56230> El objetivo de la aplicación es permitir al usuario calcular la estimación de reservas por años de origen, por años de calendario y total, partiendo de un triángulo de desarrollo completo formado por cuantías no acumuladas con igual número de años de origen que de desarrollo. La metodología que se utiliza es MLG con el supuesto Poisson-sobredisperso y enlace logarítmico, bajo dos posibilidades:

- Fórmula analítica.
- Estimación *bootstrap*.

Para el caso de reservas por años de calendario, adicionalmente a la estimación de pagos futuros, se incluye:

- Valor actual de las reservas estimadas (IBNR).
- Valor actual de las reservas añadiendo un margen de solvencia elegido por el usuario, correspondiente a un porcentaje del error de predicción estimado; esto es, se calcula el valor actual de IBNR + % P.E.
- Valor actual del Var_{α} de las reservas por años de calendario, donde el nivel de confianza, α , lo determina el usuario. Este resultado sólo se incluye en la metodología *bootstrap* ya que es donde se estima la distribución predictiva de las reservas.

Es preciso introducir la rentabilidad futura para el cálculo de los valores actuales. El aplicativo permite introducir un tipo de interés efectivo anual. La estructura del libro de Excel de la aplicación contiene las siguientes pestañas:

1. *INPUTS*. Pestaña donde el usuario debe introducir el triángulo de desarrollo con los datos, expresados en cuantías no acumuladas. Además, en esta hoja del aplicativo se halla el botón que permite la ejecución de la aplicación.
2. *GLM 1*. Pestaña donde se muestran los resultados obtenidos de las reservas totales y por años de origen mediante fórmula analítica.
3. *GLM 2*. Pestaña donde se muestran los resultados obtenidos de las reservas por años de calendario mediante fórmula analítica.
4. *Bootstrap 1*. Pestaña donde se muestran los resultados obtenidos de las reservas totales y por años de origen mediante *bootstrap*.
5. *Bootstrap 2*. Pestaña donde se muestran los resultados obtenidos de las reservas por años de calendario mediante *bootstrap*. Adicionalmente, la aplicación ofrece la posibilidad de mostrar histogramas, uno a uno, y estadísticos referidos a la distribución predictiva de las reservas por años de calendario y total.

A continuación, se ilustran los principales mensajes que el usuario encuentra cuando ejecuta la aplicación. En primer lugar, al abrirla aparecerá un libro de Excel, con las pestañas ya descritas y, concretamente, en la pestaña *INPUTS* aparecerá el ejemplo numérico que en el siguiente sub-apartado analizamos, así como el botón de ejecución de la macro (véase figura 2).

Apretando en el botón que aparece en el libro de Excel empieza la ejecución de la aplicación. Inmediatamente, aparece el mensaje informativo ilustrado en la figura 3, advirtiendo al usuario que para ejecutar correctamente la aplicación es preciso tener instalado el complemento RExcel y el paquete estadístico de R. El mensaje posterior simplemente pide al usuario si desea o no proceder con la ejecución de la macro. Si el usuario decide ejecutar, aparece una ventana informativa sobre la autoría de la aplicación y su contextualización, tal y como se aprecia en la figura 4. A continuación, la siguiente ventana emergente que aparece es la ilustrada en la figura 5. En ella, se pide al usuario que mediante la introducción del número correspondiente haga la selección de aquello que desea calcular y de qué manera. Tras introducir la correspondiente elección, la aplicación indicará que se seleccione un rango de datos de la pestaña *INPUTS*. Tras ello, se pedirá al usuario que introduzca un valor, cuando proceda, para asignar a las siguientes variables:

- Una rentabilidad para los pagos futuros (tipo de interés efectivo anual).
- Un porcentaje que se asignará al error de predicción para sumar al IBNR a modo de margen de solvencia en uno de los cálculos de valor actual ya comentados.
- Número de iteraciones a realizar en *bootstrap*.
- Nivel de confianza α para el cálculo del VaR_α .
- La visualización deseada de histogramas y estadísticos referidos a las distribuciones predictivas de las reservas por años de calendario y total.

Finalmente, se activará la pestaña correspondiente del libro de Excel y se mostrarán los resultados obtenidos.

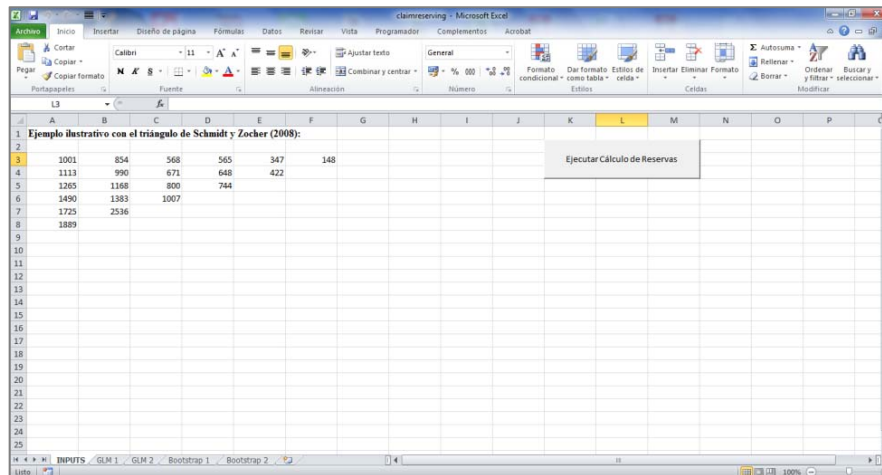


Figura 2. Vista inicial al abrir el archivo de la aplicación *claimreserving.xlsx*.

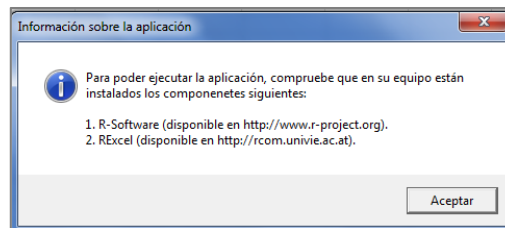


Figura 3. Ventana sobre requisitos previos para ejecutar la aplicación *claimreserving.xlsx*.



Figura 4. Información sobre la autoría de la aplicación *claimreserving.xlsx*.

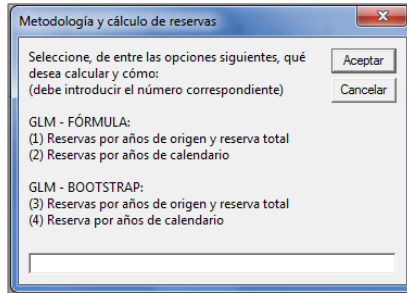


Figura 5. Elección de metodología para el cálculo de las reservas de la aplicación *claimreserving.xlsm*.

4.2. EJEMPLO NUMÉRICO

Para llevar a cabo la ilustración de resultados se ha utilizado un ejemplo de la literatura actuarial. Se trata del triángulo con datos acumulados de Schmidt y Zocher (2008), que queda recogido en la tabla 1. En la tabla 2 se calculan las cuantías no acumuladas del triángulo.

Antes de mostrar los resultados obtenidos con la macro de Excel, se presentan los resultados que se obtienen al aplicar a los datos de la tabla 1 el modelo de Mack y el MLG Poisson-sobredisperso y enlace logarítmico con estimación de errores mediante fórmula analítica haciendo uso del paquete ChainLadder (Gesmann *et al.*, 2013) de R. Los resultados quedan recogidos en las tablas de la 3 a la 6.

Año de origen i	Año de desarrollo j					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	4261				
5	1889					

Tabla 1. Triángulo de desarrollo formado por cuantías acumuladas de Schmidt y Zocher (2008).

Año de origen i	Año de desarrollo j					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	2536				
5	1889					

Tabla 2. Triángulo de desarrollo formado por cuantías no acumuladas de Schmidt y Zocher (2008).

Año de origen i	Año de desarrollo j					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	4014,588
2	1265	2433	3233	3977	4454,116	4651,780
3	1490	2873	3880	4780,731	5354,269	5591,880
4	1725	4261	5662,015	6976,436	7813,390	8160,132
5	1889	3874,541	5148,489	6343,693	7104,741	7420,034

Tabla 3. Rectángulo de desarrollo estimado formado por cuantías acumuladas para el modelo de Mack obtenido con la función MackChainLadder del paquete ChainLadder de R.

Año de origen i	Año de desarrollo j			
	Ultimate	IBNR	Mack S.E.	CV (IBNR)
0	3483	0	0,00	-
1	4015	171	9,46	0,0555
2	4652	675	26,30	0,0390
3	5592	1712	31,39	0,0183
4	8160	3899	111,81	0,0287
5	7420	5531	140,14	0,1748
Totales	33321,41	11987,41	980,86	0,08

Tabla 4. Resumen de parámetros obtenidos para el modelo de Mack obtenido con la función MackChainLadder del paquete ChainLadder de R.

Además, en la ejecución del modelo de Mack se obtienen los factores de desarrollo recogidos en la tabla 5, siendo coincidentes con los de la metodología clásica CL.

k	Factor desarrollo
0	2,051107
1	1,328800
2	1,232147
3	1,119969
4	1,044378
5	1,000000

Tabla 5. Factores de desarrollo del modelo CL obtenidos con la función MackChainLadder del paquete ChainLadder de R.

Año de origen i	Año de desarrollo j			
	Ultimate	IBNR	S.E.	CV (IBNR)
0	3483	0	0.00	-
1	4015	171	82,960	0,4851
2	4652	675	160,004	0,2370
3	5592	1712	270,821	0,1582
4	8160	3899	477,307	0,1224
5	7420	5531	737,732	0.1334
Totales	29838	11987	1167,056	0,0974

Tabla 6. Resumen de parámetros obtenidos para el MLG (CL) utilizando la opción mse.method = "formula" mediante la función glmReserve del paquete ChainLadder de R.

Los factores que se obtienen en predictor lineal al aplicar MLG con distribución Poisson-sobredispersa y link logarítmico se recogen en la tabla 7. Por otro lado, si queremos comparar el modelo de Mack con el MLG con distribución Poisson-sobredispersa y enlace logarítmico, ambos casos con la misma estimación de las reservas que el método clásico CL, podemos utilizar el porcentaje de error cometido en la predicción, es decir el porcentaje de error sobre las reservas correspondientes. En este caso, si comparamos el porcentaje, por ejemplo para las reservas totales, tenemos: para el modelo de Mack 0.08 (tabla 4) y para el MLG con estimación

analítica del error de predicción 0,0974 (tabla 6), con lo que con el modelo de Mack para estos datos el porcentaje es menor para el primer modelo.

c_0	6,78751
α_1	0,14204
α_2	0,28936
α_3	0,47342
α_4	0,85137
α_5	0,75629
β_1	0,04984
β_2	-0,39393
β_3	-0,45773
β_4	-0,90911
β_5	-1,79030

Tabla 7. Valor de los parámetros del predictor lineal para el MLG (CL) utilizando la opción `mse.method = "formula"` mediante la función `glmReserve` del paquete `ChainLadder` de R.

Año de origen i	Año de desarrollo j					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	170,588
2	1265	1168	800	744	477,116	197,664
3	1490	1383	1007	900,731	573,539	237,611
4	1725	2536	1401,015	1314,420	836,955	346,741
5	1889	1985,541	1273,948	1195,207	761,046	315,293

Tabla 8. Rectángulo de desarrollo formado por cuantías no acumuladas obtenido con la aplicación `claimreserving.xlsm`.

Ahora procedemos a mostrar los resultados obtenidos mediante la aplicación propia desarrollada, para cada una de las cuatro posibilidades de cálculo implementadas. Cabe mencionar que los datos introducidos para los supuestos toman los valores siguientes:

- Rentabilidad para los pagos futuros (tipo de interés efectivo anual): 0,3%.
- Porcentaje del error de predicción: 25%.

- Número de iteraciones a realizar en *bootstrap*: 1000.
- Nivel de confianza α para el cálculo del VaR_α : 75%.

Como primer resultado mostramos en la tabla 8 el rectángulo de desarrollo formado por cuantías no acumuladas, que en realidad se obtiene en todos los casos, ya que tanto para el método CL, para el modelo de Mack y para el MLG Poisson-sobredisperso con enlace logarítmico coincide la estimación de las reservas. Los resultados para cada una de las cuatro posibilidades que ofrece la macro se presentan en las tablas de la 9 a la 12, nombradas por su pestaña de resultados.

Comentar respecto de los resultados de la tabla 12 que, en función del nivel de confianza que el usuario elija para el cálculo del VaR en la distribución predictiva y también del porcentaje de error de predicción que se asigne, los resultados de los valores actuales variarán. Oscilarán con mayor o menor grado hacia una postura de mayor o menor riesgo, en función de lo alejado que se encuentre de la media. El denominado “Valor Actual IBNR” en la tabla 12 representa un umbral mínimo exigible, pues se corresponde con la media de la distribución. Observamos que en este ejemplo hemos obtenido menor valor actual al añadir un margen de solvencia igual al 25% del error de predicción que con el valor actual del VaR al nivel de confianza del 75%. Por otro lado, cuando proceda la posibilidad de visualizar histogramas y estadísticos referidos a la distribución predictiva, aparecerá la ventana que se ilustra en la figura 6. En ella, el usuario puede seleccionar entre las reservas por años de calendario y total.

1. *GLM I*. Reservas totales y por años de origen:

Años de origen	IBNR	P.E.	C.V.
0	0	0	-
1	170,588306	82,959836	0,48631608
2	674,779827	160,003724	0,2371199
3	1711,87999	270,820512	0,15820064
4	3899,13151	477,307109	0,1224137
5	5531,03429	737,731548	0,1333804
PT Total	11987,4139	1167,05581	0,09735676

Tabla 9. Resultados sobre reservas por años de origen y total con fórmula analítica obtenidos con la aplicación *claimreserving.xlsm*.

2. GLM 2. Reservas por años de calendario:

Años de calendario	IBNR	P.E.	C.V.
6	4934,99152	440,797315	0,08932078
7	3359,57066	379,501103	0,11296119
8	2269,77214	331,884075	0,14621912
9	1107,78673	244,241108	0,22047665
10	315,292873	139,453771	0,44229916
Tipo de interés (tanto por uno): 0,003 % P.E. (tanto por uno): 0,25 Valor Actual IBNR: 11914,39871 Valor Actual IBNR + 25% P.E.: 12295,48392			

Tabla 10. Resultados sobre reservas por años de calendario con fórmula analítica obtenidos con la aplicación *claimreserving.xls*.

3. Bootstrap 1. Reservas totales y por años de origen:

Años de origen	IBNR	P.E.	C.V.
0	0	0	-
1	170,588306	81,3294014	0,47675836
2	674,779827	163,706997	0,24260802
3	1711,87999	263,794507	0,15409638
4	3899,13151	473,690494	0,12148615
5	5531,03429	732,82986	0,13249418
PT Total	11987,4139	1207,77949	0,10075397

Tabla 11. Resultados sobre reservas por años de origen y total con metodología *bootstrap* obtenidos con la aplicación *claimreserving.xls*.

4. *Bootstrap* 2. Reservas por años de calendario:

Años de calendario	IBNR	P.E.	C.V.	VaR
6	4934,99152	448,599947	0,09090187	5096,583
7	3359,57066	386,579795	0,11506821	4737,66871
8	2269,77214	337,81103	0,14883037	5222,20301
9	1107,78673	247,589377	0,22349914	4289,02584
10	315,292873	144,500638	0,45830607	4486,4287
<p>Tipo de interés (tanto por uno): 0,003 % P.E. (tanto por uno): 0,25</p> <p>Valor Actual IBNR: 11914,39871</p> <p>Valor Actual IBNR + 25% P.E.: 12302,72639</p> <p>Valor Actual VaR al 75%: 23623,86782</p>				

Tabla 12. Resultados sobre reservas por años de calendario con metodología *bootstrap* obtenidos con la aplicación *claimreserving.xlsm*.

Finalmente, los histogramas relativos a la distribución predictiva de las reservas por años de calendario y total junto con algunos estadísticos de dichas distribuciones se muestran en las figuras de la 7 a la 12 del Anexo. Con esta descripción estadística de las distribuciones predictivas de las reservas el usuario puede tomar mejores decisiones sobre el nivel de confianza a seleccionar en el cálculo del VaR.

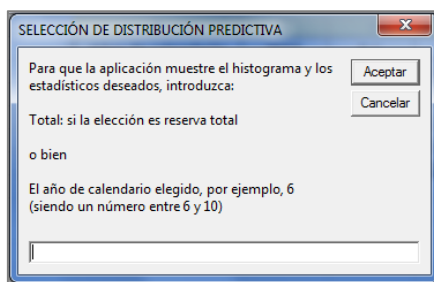


Figura 6. Selección de histogramas y estadísticos a visualizar para el caso 4 (GLM-BOOTSTRAP, Reservas por años de calendario) de la aplicación *claimreserving.xlsm*.

5. PRINCIPALES CONCLUSIONES Y APORTACIONES

En referencias bibliográficas sobre MLG aplicado al problema de cálculo de provisiones técnicas y en paquetes estadísticos de referencia (como el paquete ChainLadder de R), las formulaciones sobre cálculo de reservas y errores de predicción únicamente están explicitadas y programadas para reservas por años de origen y total. Pero para poder tratar los pagos futuros en un ambiente financiero dentro del contexto de Solvencia II, es conveniente trabajar con provisiones por años de calendario. En este sentido, las principales aportaciones de este artículo son dos: por un lado, la deducción estadística de las formulaciones de reservas por años de calendario para el MLG (tanto con estimación analítica del error de predicción como con aproximación *bootstrap* de la distribución predictiva) y, por otro, la elaboración de una aplicación para el usuario realizada con RExcel, que permite el cálculo de reservas por años de origen, de calendario y total. Además, calcula valores actuales a un tipo de interés especificado por el usuario de las reservas por años de calendario, pudiendo incorporar márgenes de solvencia por dos vías: o bien añadiendo un porcentaje del error de predicción cometido en la estimación de reservas, o bien sustituyendo (en el caso de estimación *bootstrap* del error de predicción) el valor de las reservas por años de calendario por el VaR a un nivel de confianza mayor al 50% de la distribución predictiva de dichas reservas. Los márgenes de solvencia así calculados se basan en criterios con justificación estadística y posibilitan al actuario un mayor control sobre el capital mínimo y en solvencia obligatorios de la Entidad Aseguradora.

El artículo se ha centrado en el caso en que las características del MLG son: distribución de Poisson-sobredispersa y función de enlace logarítmica, pues

este caso generaliza el método determinista CL clásico. Pero, tal y como se explica en el artículo, el MLG tiene como casos particulares otros métodos deterministas de la bibliografía actuarial como son el de mínimos cuadrados de de Vyllder y los de separación aritmética y geométrica de Taylor. Además, podríamos estar interesados en suponer otras distribuciones del error como son la Gamma o la Inversa Gaussiana combinadas con la función de enlace logarítmica o cualquier otra, ya que el análisis se realiza sobre las cuantías del triángulo de desarrollo.

El archivo de RExcel elaborado tiene nombre y extensión: *claimreserving.xlsm* y puede ser descargado del depósito digital de la Universidad de Barcelona: <http://hdl.handle.net/2445/56230>

El detalle de la aplicación es el siguiente: calcula la estimación de reservas por años de origen, por años de calendario y total, partiendo de un triángulo de desarrollo completo formado por cuantías no acumuladas con igual número de años de origen que de desarrollo. La metodología que se utiliza es MLG bajo el supuesto Poisson-sobredisperso y enlace logarítmico, y ajusta los errores de predicción bajo dos posibilidades: fórmula analítica y estimación *bootstrap*. Para el caso de reservas por años de calendario, adicionalmente a la estimación de pagos futuros, se incluye: valor actual de las reservas estimadas; valor actual de las reservas añadiendo un margen de solvencia elegido por el usuario, correspondiente a un porcentaje del error de predicción; valor actual del VaR de las reservas por años de calendario, donde el nivel de confianza lo determina el usuario. Este resultado sólo se incluye en la metodología *bootstrap* ya que es donde se estima la distribución predictiva de las reservas. Tras introducir la elección, la aplicación indica que se seleccione un rango de datos y se solicita al usuario que introduzca un valor, cuando proceda, para asignar a las siguientes variables: rentabilidad de los pagos futuros (tipo de interés efectivo anual); porcentaje que se sumará del error de predicción para el margen de solvencia; número de iteraciones a realizar en *bootstrap*; y nivel de confianza para el cálculo del VaR. En caso de *bootstrap* la aplicación permite visualizar histogramas y estadísticos referidos a la distribución predictiva de reservas por años de calendario y total.

Para completar el artículo ilustrando los conceptos estudiados, se realiza un ejemplo numérico utilizando el aplicativo de RExcel para ajustar todos los escenarios con los datos del conocido triángulo de desarrollo de Schmidt y Zocher (2008).

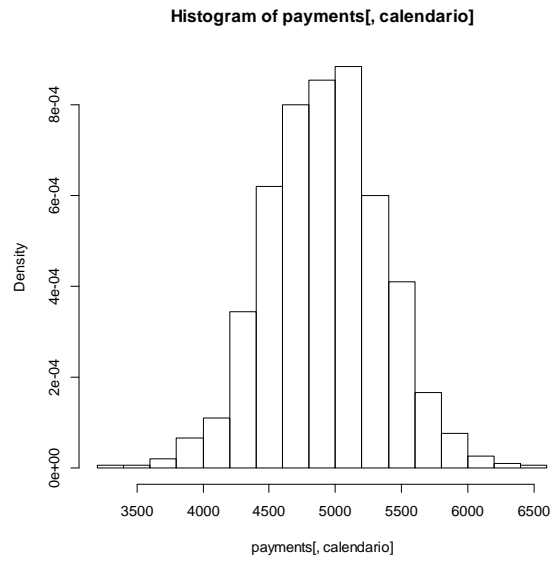
BIBLIOGRAFÍA

- Albarrán, I. y P. Alonso (2010). *Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II*. Cuadernos de la Fundación MAPFRE, 158. Fundación MAPFRE Estudios, Madrid.
- Alonso, P. (2007). Solvencia II: ejes del proyecto y diferencias con Basilea II. *Anales Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera Época 13, 37–56.
- Álvarez-Jareño, J.A. y V. Coll-Serrano (2012). Estimación de reservas en una compañía aseguradora. Una aplicación en Excel del método Chain-Ladder y Bootstrap. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa* 14, 124–136.
- Baier, T. y E. Neuwirth (2007). Excel :: COM :: R. *Computational Statistics* 22:1, 91–108. <http://rcom.univie.ac.at>
- Boj, E., Claramunt, M. M. y J. Fortiana (2004). *Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación*. Cuadernos de la Fundación MAPFRE, 88. Fundación MAPFRE Estudios, Madrid.
- Boj, E. y T. Costa (2014). *Modelo lineal generalizado y cálculo de la provisión técnica*. Depósito digital de la Universidad de Barcelona. Colección de objetos y materiales docentes (OMADO). <http://hdl.handle.net/2445/49068>
- Costa, T., Boj, E. y J. Fortiana (2012). Bondad de ajuste y elección del punto de corte en regresión logística basada en distancias, aplicación al problema de credit scoring. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, Tercera Época 18, 19–40.
- El Parlamento Europeo y el Consejo de la Unión Europea (2009). Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009. *Diario Oficial de la Unión Europea*, L 335:1–155. <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:es:PDF>
- England, P. D. y R. J. Verrall (1999). Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: Mathematics and Economics* 25, 281–293.
- England, P. D. y R. J. Verrall (2002). Stochastic claims reserving in general insurance (with discussion). *British Actuarial Journal* 8, 443–544.
- England, P. D. (2002). Addendum to “Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claim reserving”. *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 461–466.
- England, P. D. y R. J. Verrall (2006). Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance. *Annals of Actuarial Science* 1 (II), 221–270.
- Espejo, J., Boj, E. y T. Costa (2014). *Una aplicación de RExcel para el cálculo de provisiones técnicas con modelo lineal generalizado*. Depósito

- digital de la Universidad de Barcelona. Colección de Investigación-Software. <http://hdl.handle.net/2445/56230>
- Gesmann, M., Murphy, D. y W. Zhang (2013). *ChainLadder: Statistical methods for the calculation of outstanding claims reserves in general insurance*. Package on CRAN. Version 0.1.7. Publicado 28-09-2013. <http://cran.r-project.org/web/packages/ChainLadder/index.html>
- Haberman, S. y A. E. Renshaw (1996). Generalized linear models and actuarial science. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)* 45:4, 407-436.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. y M. Denuit (2008). *Modern actuarial risk theory: using R. Second edition*. Springer-Verlag. Heidelberg.
- Mack, T. (1993). Distribution free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin* 23, 213–225.
- Mack, T. y G. Venter (2000). A comparison of stochastic models that reproduce Chain Ladder reserve estimates. *Insurance: Mathematics and Economics* 26, 101–107.
- McCullagh, P. y J. Nelder (1989). *Generalized linear models (2nd edition)*. Chapman and Hall. Londres.
- Ministerio de Economía y Competitividad. Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados (1998). Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre de 1998. *Boletín Oficial del Estado*, de 25 de noviembre de 1998. http://www.dgsfp.mineco.es/sector/documentos/legislacion/2013/R.D.2486.1998_REGLAMENTO_DE_ORDENACION_Y_SUPERVISION_DE_LOS_SEGUROS_PRIVADOS.16.10.2013.pdf
- Moreno, F. P. (2013). *Jornada sobre las Directrices de EIOPA de preparación a Solvencia II*. Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones. http://www.dgsfp.mineco.es/sector/documentos/JornadaDirectrices_EIO_PA_de_preparacion_Solvencia_II_10-12-2013/Fernando_Moreno_Jornada_Directrices_EIOPA_DGSFP-UNESPA.pdf
- Price Waterhouse Coopers (2007). *Solvencia II. Principios incluidos en la propuesta de Directiva*. Chile. <http://www.pwc.com/cl/es/publicaciones/assets/solvencia2.pdf>
- R Development Core Team (2014). *R: a language and environment for statistical computing*. Vienna. Austria. <http://www.R-project.org/>
- Schmidt, K. D. y M. Zocher (2008). The Bornhuetter-Ferguson principle. *Variance. Advancing the Science of Risk* 2:1, 85-110.
- UNESPA (2007). *El modelo español de solvencia paso a paso*. Madrid. http://www.unespa.es/adjuntos/fichero_2590_20080227.pdf

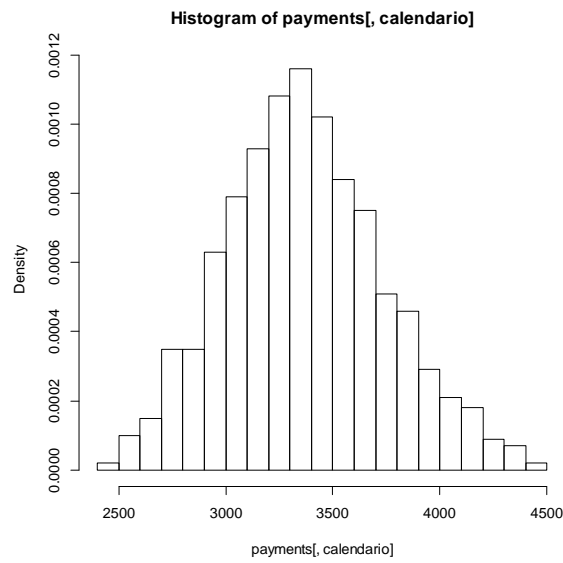
- Van Eeghen, J. (1981). Loss reserving methods. *Surveys of Actuarial Studies* 1. National Nederlanden.
- Verrall, R. (2000). An investigation into stochastic claims reserving models and the Chain-ladder technique. *Insurance: Mathematics and Economics* 26, 91–99.
- Verrall, R. y P. England (2000). Comments on: “A comparison of stochastic models that reproduce Chain Ladder reserve estimates, by Mack and Venter”. *Insurance: Mathematics and Economics* 26, 109–111.

ANEXO



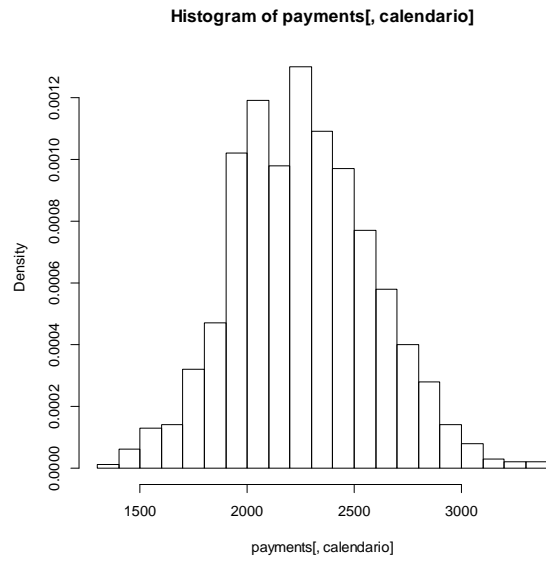
Estadísticos de la distribución predictiva - Año de calendario 6					
Cuantiles:					
65%	75%	80%	95%	99%	99,50%
5096,583	5204,2573	5276,0401	5652,9002	5922,2653	6030,2088
Media:			4921,9353		
Desviación Estándar:			436,73929		
C.V. (%):			8,8733244		
Coefficiente de Asimetría:			0,0221273		
Coefficiente de Curtosis:			0,2477966		

Figura 7. Resultados de la aplicación sobre la descripción estadística de la distribución predictiva para la reserva del año de calendario 6.



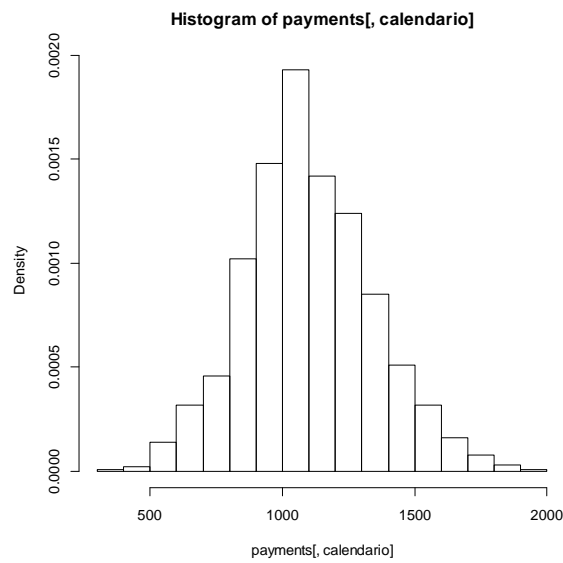
Estadísticos de la distribución predictiva - Año de calendario 7					
Cuantiles:					
65%	75%	80%	95%	99%	99,50%
3499,4144	3607,0887	3678,8715	4037,7858	4289,0258	4307,0613
Media:			3371,7486		
Desviación Estándar:			369,30018		
C.V. (%):			10,952779		
Coficiente de Asimetría:			0,2333641		
Coficiente de Curtosis:			-0,161672		

Figura 8. Resultados de la aplicación sobre la descripción estadística de la distribución predictiva para la reserva del año de calendario 7.



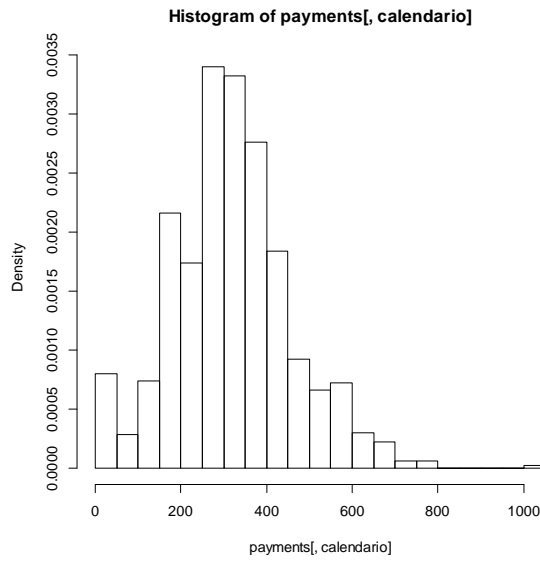
Estadísticos de la distribución predictiva - Año de calendario 8					
Cuantiles:					
65%	75%	80%	95%	99%	99,50%
2368,8344	2494,4544	2530,3458	2835,4229	3033,0053	3140,7693
Media:			2266,454		
Desviación Estándar:			325,28038		
C.V. (%):			14,351951		
Coefficiente de Asimetría:			0,1997773		
Coefficiente de Curtosis:			-0,024867		

Figura 9. Resultados de la aplicación sobre la descripción estadística de la distribución predictiva para la reserva del año de calendario 8.



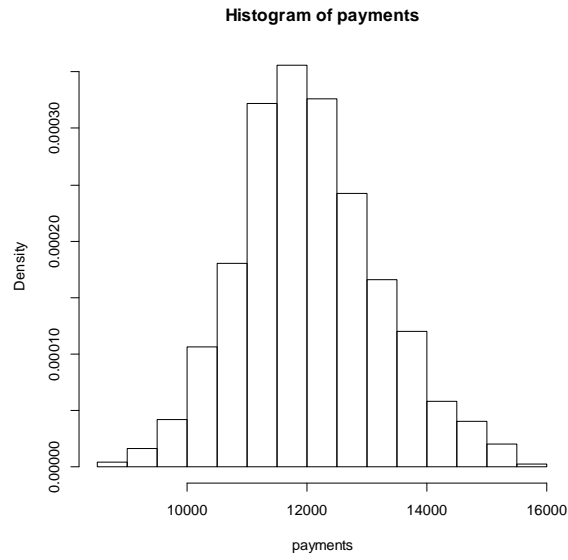
Estadísticos de la distribución predictiva - Año de calendario 9					
Cuantiles:					
65%	75%	80%	95%	99%	99,50%
1166,4715	1256,2	1292,0915	1526,283	1705,0224	1776,7155
Media:			1100,6825		
Desviación Estándar:			242,33413		
C.V. (%):			22,016716		
Coefficiente de Asimetría:			0,2587886		
Coefficiente de Curtosis:			0,1327153		

Figura 10. Resultados de la aplicación sobre la descripción estadística de la distribución predictiva para la reserva del año de calendario 9.



Estadísticos de la distribución predictiva - Año de calendario 10					
Cuantiles:					
65%	75%	80%	95%	99%	99,50%
358,9143	394,80573	416,34058	574,26287	682,11662	735,77431
Media:			318,68		
Desviación Estándar:			141,92097		
C.V. (%):			44,534005		
Coefficiente de Asimetría:			0,4058339		
Coefficiente de Curtosis:			0,8247695		

Figura 11. Resultados de la aplicación sobre la descripción estadística de la distribución predictiva para la reserva del año de calendario 10.



Estadísticos de la distribución predictiva - Reserva Total					
Cuantiles:					
65%	75%	80%	95%	99%	99,50%
12418,435	12795,295	13010,643	14160,066	15038,688	15218,056
Media:			12045,253		
Desviación Estándar:			1178,9401		
C.V. (%):			9,787591		
Coefficiente de Asimetría:			0,2781478		
Coefficiente de Curtosis:			-0,003808		

Figura 12. Resultados de la aplicación sobre la descripción estadística de la distribución predictiva para la reserva total.